سری کتاب‌های قورت بده!

تحقیق در عملیات (۱)

قابل استفاده برای رشته های کارشناسی ارشد و دکتری :
مهندسی صنایع (کلیه گرایشها)
ریاضیات و کاربردها
مجموعه مدیریت

شامل :
سوالات و پاسخهای کاملا تشریحی تستهای کنکور ارشد رشته های فوق
جمع بندی نکات مهم هر مبحث
تعیین درجه سختی و طبقه بندی تستها

امیر ایمن پور

کانالها و گروه تحقیق در عملیات مهندس ایمن پور

مدرس تحقیق در عملیات کنکور ارشد و دکتری

کانال اصلی تحقیق در عملیات ۱و۲ امیر ایمن پور

@OR۱۲_ir

گروه رفع اشکال درس تحقیق در عملیات ۱و۲

https://t.me/joinchat/BSv۵ck۳nHYzj۳s۰DmRz-iQ

کانال رفع اشکال تحقیق در عملیات ۱و۲

@OR۱۲ir

ادمین تلگرام

@imenpour

اینستاگرام تحقیق در عملیات ۱و۲

instagram.com/or۱۲.ir

سایت تحقیق در عملیات ۱و۲

www.OR۱۲.ir

ایمیل

imenpour@outlook.com

فصل اول: مفاهیم تحقیق در عملیات، برنامه‌ریزی خطی

۱- مسأله بهینه‌یابی $\max z = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|$ $\quad S.t: Ax = b$ را با کدام شیوه می‌توان به یک مسأله خطی تبدیل و با الگوریتم سیمپلکس جواب بهینه را بدست آورد؟(صنایع۷۹)

۱) جایگزینی x_i با $(u_i + v_i)$ در معادله هدف و $(u_i - v_i)$ در محدودیت‌ها، مشروط بر اینکه u_i و v_i آزاد در علامت باشند.

۲) جایگزینی x_i با $(u_i - v_i)$ در کل مسأله مشروط بر اینکه $v_i \geq 0$ و u_i باشند.

۳) جایگزینی x_i با $(u_i - v_i)$ در معادله هدف و $(u_i + v_i)$ در محدودیت‌ها، مشروط بر اینکه $u_i, v_i \geq 0$ باشند.

۴) جایگزینی x_i با $(u_i + v_i)$ در تابع هدف و $(u_i - v_i)$ در محدودیت‌ها، مشروط بر اینکه $u_i, v_i \geq 0$ باشند.

۲- در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تابع هدف به‌صورت $\max \quad z = |2x_1 - 3x_2|$ می‌باشد برای خطی کردن تابع هدف کدام مجموعه زیر را پیشنهاد می‌کنید؟ فرض کنید $x_1, x_2 \geq 0$ (صنایع۸۲)

۱) $\begin{cases} \max \quad z = y_1 - y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 - y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \max \quad z = y_1 + y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \max \quad z = y_1 - y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 + y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} \max \quad z = y_1 + y_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = y_1 - y_2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$

۳- مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر مفروض است:

$$\min \quad z = |3x+1|$$

کدام مسأله برنامه‌ریزی خطی، هم‌ارز مسأله بالا می‌باشد؟ (سیستم۸۱)

۱) $\min \quad z \quad \text{s.t.} \begin{cases} 3x+1 \geq z \\ 3x+1 \geq -z \end{cases}$

۲) $\min \quad z \quad \text{s.t.} \begin{cases} 3x+1 \leq z \\ 3x+1 \geq -z \end{cases}$

۳) $\min \quad z \quad \text{s.t.} \begin{cases} 3x+1 \leq z \\ -3x+1 \leq z \end{cases}$

۴) $\min \quad z \quad \text{s.t.} \begin{cases} 3x-1 \geq z \\ -3x+1 \leq -z \end{cases}$

۴- مسأله داده شده $\begin{cases} \text{minimize} \quad 2|x_1|+x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1+x_2 \geq 4 \end{cases}$ معادل کدام مسأله زیر است؟ (صنایع۸۶)

۱) $\begin{cases} \text{minimize} \quad 2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1+x_2 \geq 4 \\ \quad x_1 \leq z_1 \\ \quad -x_1 \leq z_1 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} \text{minimize} \quad 2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1+x_2 \geq 4 \\ \quad x_1 \leq z_1 \\ \quad x_1 \leq -z_1 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} \text{minimize} \quad -2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1+x_2 \geq 4 \\ \quad x_1 \geq z_1 \\ \quad x_1 \geq -z_1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} \text{minimize} \quad 2z_1+x_2 \\ \text{s.t.} \quad -x_1+x_2 \geq 4 \\ \quad -x_1 \geq z_1 \\ \quad -x_1 \geq -z_1 \end{cases}$

۵- مسأله زیر داده شده است: (صنایع۷۶)

$$\min \sum_{i=1}^{m} t_i$$

$$\text{s.t}: t_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad ; \quad i=1,\dots,m$$

$$t_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i \quad ; \quad i=1,\dots,m$$

۱) این مسأله معادل مسأله $\text{Min}\sum_{i=1}^{m}\left|b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|$ است.

۲) این مسأله معادل مسأله $\text{Min}\sum_{i=1}^{m}\left|b_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|$ است.

۳) این مسأله معادل مسأله $\text{Max}\sum_{i=1}^{m}\left|b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|$ است.

۴) این مسأله معادل مسأله $\text{Max}\sum_{i=1}^{m}\left|b_i+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|$ است.

۶- فرم خطی مسأله زیر کدام است؟ (صنایع ۸۹)

$$\max|3x_1+2x_2|$$

۱) $\max z$ s.t. $3x_1+2x_2\le z$, $3x_1+2x_2\ge -z$

۲) $\max z$ s.t. $3x_1+2x_2\ge z$, $3x_1+2x_2\le -z$

۳) $\max z_1+z_2$ s.t. $3x_1+2x_2=z_1-z_2$, $z_1,z_2\ge 0$

۴) $\max z_1+z_2$ s.t. $3x_1+2x_2\ge z$, $3x_1+2x_2\ge -z$, $z_1,z_2\ge 0$

۷- مدل زیر را درنظر بگیرید:

با توجه به مسأله مقابل چه می‌توان گفت؟ (صنایع ۸۰)

$$\max z=\min\{20,|3x_1-3x_2+4x_3|,|x_1+x_2-2x_3|\}$$
$$\text{s.t.}\quad Ax\le b$$
$$x\ge 0$$

۱) یک مسأله برنامه‌ریزی نیست.

۲) قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی می‌باشد.

۳) فقط قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد.

۴) فقط قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای صحیح می‌باشد.

۸- مسأله زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Minimize}\{\text{Maximum}(|3x_1-2x_2+4x_4|,|x_1+x_2+2x_3|)\}$$

این مسأله قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی ... : (صنایع۷۸)

۱) خطی با متغیرهای صحیح می‌باشد. ۲) غیرخطی با متغیرهای صحیح می‌باشد.

۳) خطی نمی‌باشد. ۴) خطی می‌باشد.

۹- مجموعه‌ای از m معادله‌ی خطی با n متغیر را درنظر بگیرید. این مجموعه را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

فرض کنید که در این مجموعه معادلات با همدیگر ناسازگار باشند. مسأله حداقل خطا مقادیری برای $x_1,x_2,\dots,x_n$ تعیین می‌کند تا بزرگ‌ترین اختلاف مابین سمت راست و چپ معادلات حداقل گردند. یک متغیر به نام x_0 درنظر بگیرید. $(x_0 \geq 0)$ برای اینکه در هر معادله، اختلاف میان دوطرف کمتر از x_0 باشد، می‌توان مسأله را به‌صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله نمود. کدام‌یک از مدل‌های زیر برای این منظور مناسب می‌باشند: (صنایع ۸۴)

۱) $\min x_0 \ \ st: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = x_0 \qquad (i = 1,\dots,m)$

۲) $\min x_0 \ \ st: \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq x_0 \qquad (i = 1,\dots,m)$

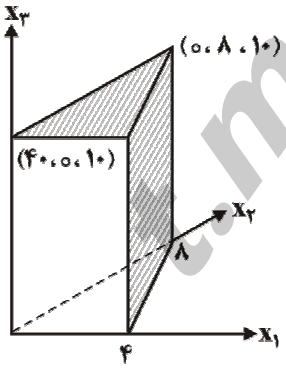
۳) $\min x_0 \ \ st: x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i = 1,\dots,m)$

$x_0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i \qquad (i = 1,\dots,m)$

۴) $\min x_0 \ \ st: x_0 - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i = 1,\dots,m)$

$x_0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq -b_i \qquad (i = 1,\dots,m)$

۱۰- هرم (poly hedron) زیر را در نظر بگیرید. در این صورت محدودیت‌هایی که می‌تواند این هرم را نشان دهد، کدام است؟ (صنایع ۸۰)



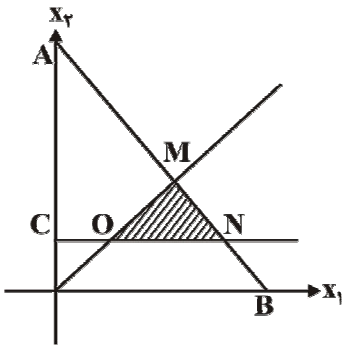
۱) $x_3 \leq 10 \ , \ 2x_1 + x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0$

۲) $x_3 \leq 10 \ , \ x_2 \leq 8 \ , \ x_1 \leq 4$
$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0$

۳) $x_2 \leq 8 \ , \ x_1 \leq 4 \ , \ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 320$
$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \geq 0$

۴) $x_2 \leq 8 \ , \ x_1 \leq 4 \ , \ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 10$
$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0$

۱۱- فضای موجه هاشورخورده در شکل زیر مفروض است. کدام گزینه معادلات مربوطه را نشان مـی‌دهـد؟ (سیستم۸۱)



۱) $x_2 \geq$ ، $x_1 \leq x_2$ ، $x_1 + x_2 \leq$

۲) $x_2 \geq$ ، $x_1 \geq x_2$ ، $x_1 + x_2 \leq$

۳) $x_2 \geq$ ، $x_1 = x_2$ ، $x_1 + x_2 \leq$

۴) $x_2 \leq$ ، $x_1 \geq x_2$ ، $x_1 + x_2 \leq$

۱۲- مجموعـــه $X = \{(x_1, x_2) : -x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + 2x_2 \leq 8, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ را درنظـــر بگیریـــد. کوچک‌ترین فاصله نقطه $A(-2,3)$ از این مجموعه چقدر است؟ (صنایع۸۲)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{6}$ ۴) ۳

۱۳- منطقه موجه یک LP به‌صورت یک پاره‌خط است. این مسأله دارای: (سیستم۸۷)

۱) دو محدودیت بزرگ‌تر یا مساوی است.

۲) دو محدودیت کوچک‌تر یا مساوی است.

۳) یک محدودیت کوچک‌تر یا مساوی و یک محدودیت بزرگ‌تر یا مساوی با ضرایب مختلف است.

۴) یک محدودیت کوچک‌تر و مساوی و یک محدودیت تساوی است.

۱۴- فضای جواب با مشخصات زیر را در نظر بگیرید. شعاع کوچک‌تـرین دایـره‌ای کـه بـه مرکـز $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ می‌تواند بر فضای جواب محیط بوده و تنها در یک نقطه با آن مشترک باشد، چقدر است؟ (صنایع ۸۹)

$x_2 \leq 3$

$x_1 + x_2 \leq 5$

$x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

۱) ۲ ۲) ۳.۱ ۳) ۲.۵۵ ۴) ۲.۱۲

۱۵- در مسأله برنامه‌ریزی خطی (صنایع ۸۱)

$$\min \quad z = x_1$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 > 0$$

۱) مسأله جواب شدنی ندارد پس جواب بهینه نیز نخواهد داشت.
۲) مسأله دارای جواب شدنی است ولی دارای جواب بهینه نمی‌باشد.
۳) مسأله دارای جواب بهینه است چون دارای جواب شدنی است.
۴) مسأله دارای حد پایین است ولی جواب شدنی ندارد.

۱۶- فرض کنید x^0 جواب بهینه‌ی یک مسأله ماکزیمم کردن به صورت زیر باشد که به ازای آن محدودیت‌های اول و سوم به حد خود رسیده‌اند:

$$(\max \ z = cx \ , \ Ax \le b \ , \ x \ge 0)$$

اگر A^i معرف ضرایب سطر i ام ماتریس A باشد: (صنایع ۸۴)

۱) باید داشته باشیم $cA^1 < 0$ و $cA^3 > 0$
۲) باید داشته باشیم $cA^1 < 0$ و $cA^3 < 0$
۳) باید داشته باشیم $cA^i < 0$ برای تمام iها
۴) باید داشته باشیم $cA^1 > 0$ و $cA^3 > 0$

۱۷- در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر:

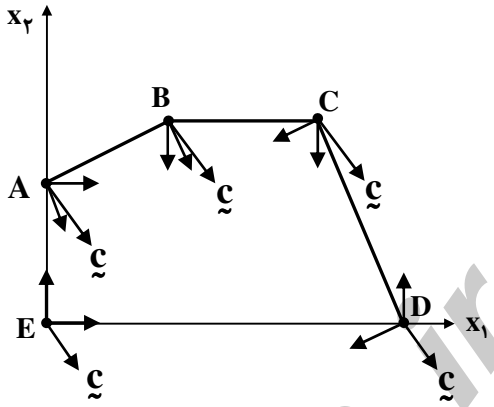
$$\begin{aligned} \text{Max} \ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 &\le -1 \\ -x_2 &\le -1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

در نقطه بهینه، گرادیان تابع هدف، در مخروط گرادیان حاصل از کدام‌یک از محدودیت‌های فعال واقع می‌شود؟ (صنایع ۹۰)

۱) محدودیت ۱ و ۲
۲) محدودیت ۱ و ۳
۳) محدودیت ۲ و ۴
۴) محدودیت ۳ و ۴

۱۸- در شکل زیر کدام پاسخ، نقطهٔ بهینه یک مسأله حداکثرسازی است؟ (سیستم ۹۰)

۱) A
۲) B
۳) C
۴) D



۱۹- مسأله برنامه‌ریزی خطی مقابل را درنظر بگیرید، در این صورت کدام مورد صحیح می‌باشد؟ (صنایع۸۸)

$$\text{Max } Z = X_1 + 4X_2 + X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 - 2X_2 + X_3 = 2 \\ X_1 \qquad - X_3 = 1 \\ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 \end{cases}$$

۱) این مسأله دارای جواب بهینه محدودی نیست و مقدار تابع هدف آن بینهایت است.
۲) جواب بهینه عبارت است از: $X_1 = 1 \ , \ X_2 = X_3 = 0$
۳) جواب بهینه عبارت است از: $X_1 = X_2 = 3 \ , \ X_3 = 2$
۴) این مسأله دارای جواب موجهی نیست.

۲۰- برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید. مقدار بهینه‌ی تابع هدف آن چقدر است؟ (صنایع۸۳)

$$\max z = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad &\leq 2 \\ 2x_1 \qquad - x_3 &\leq 2 \\ - x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

۱) مقدار بهینه‌ی تابع هدف برابر ۱۰ است.
۲) مقدار بهینه‌ی تابع هدف برابر ۸ است.
۳) مقدار بهینه‌ی تابع هدف برابر ۶ است.
۴) مقدار بهینه‌ی تابع هدف برابر ۴ است.

۲۱- در مسأله زیر مقدار تابع هدف چقدر است؟ (سیستم۸۷)

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 \quad &\le 2 \\ 2x_1 \quad - x_3 &\le 2 \\ -x_1 \quad + x_3 &\le 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

۲۲- مقدار بهینه **z** در مدل زیر عبارت است از: (صنایع۸۶)

$$\begin{aligned} \text{maximize } Z &= 50x_1 + 40x_2 + 20x_3 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\le 300 \\ x_2 + x_3 &\ge 100 \\ x_3 &\ge 10 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

۱) ۷۴۰۰ ۲) ۷۸۰۰ ۳) ۸۲۰۰ ۴) ۱۲۶۰۰

۲۳- در مدل سوال قبل چنانچه محدودیت سوم حذف گردد آن‌گاه مقدار بهینه **z**: (صنایع۸۶)

۱) افزایش می‌یابد. ۲) کاهش می‌یابد.
۳) نمی‌توان تعیین کرد. ۴) تغییر نمی‌کند.

۲۴- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max\ Z &= 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 8x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 7x_8 \\ \text{s.t:} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &\le 100 \\ 5 \le x_j \le 20 \quad , \quad j &= 1,\dots,8 \end{aligned}$$

در مسأله فوق حداکثر مقدار **Z** عبارت است از: (صنایع۷۵)

۱) ۵۲۰ ۲) ۵۷۰ ۳) ۶۴۰ ۴) هیچکدام

۲۵- مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام مقدار است؟ (صنایع۸۲)

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 - 6x_6 \\ \text{s.t. } 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 10x_6 &\ge 100 \\ 0 \le x_j \le 6 \qquad j &= 1,2,\dots,6 \end{aligned}$$

۱) -48 ۲) ϕ ۳) -54.8 ۴) ۳۲

۲۶- مقدار بهینه تابع هدف در مسأله زیر عبارت است از: (صنایع۸۵)

$$\max z = ۲x_۱ + ۴x_۲ + ۸x_۳ + ۶x_۴ + ۱۰x_۵$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{۱}{۲}x_۱ + \frac{۱}{۲}x_۲ + ۲x_۳ + ۲x_۴ + ۸x_۵ \le ۳۱$$

$$۰ \le x_j \le ۱۰ \quad j = ۱,...,۵$$

۱) ۱۴۳ ۲) ۱۷۶ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۲۷- جواب بهینه **LP** زیر کدام است؟ (سیستم۸۷)

$$\max \ z = ۳x_۱ - ۴x_۲ - ۵x_۳ + ۶x_۴$$

$$\text{s.t.} \quad ۹x_۱ + ۵x_۲ + ۴x_۳ + ۳x_۴ \le ۲۷۰$$

$x_i \ge ۰$ برای تمامی **i**ها

۱) ۲۲۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۹۰۰ ۴) هیچ‌کدام

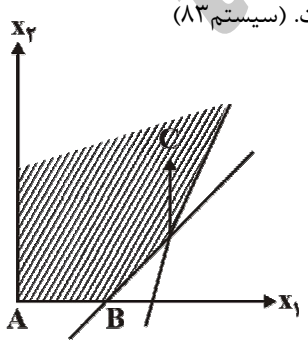
۲۸- مقدار بهینه تابع هدف زیر برابر ..... و جواب بهینه ..... می‌باشد. (صنایع ۸۹)

$$\text{Min } z = x_۱ + x_۲$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲ \\ & x_۱ + x_۴ = ۱ \\ & x_۲ + x_۵ = ۱ \\ & x_۱, x_۲, ..., x_۵ \ge ۰ \end{aligned}$$

۱) ۲، منحصر به فرد ۲) ۳، نشدنی
۳) ۳، چندگانه ۴) ۲، نامتناهی

۲۹- فرض کنید شکل مقابل ناحیه‌ی شدنی یک برنامه‌ریزی خطی را نشان می‌دهد و **c** بردار گرادیان تابع هدفی از نوع مینیمم کردن است. در این‌صورت کدام گزینه صحیح است. (سیستم۸۳)



۱) مسأله دارای جواب بهینه‌ی کراندار نیست.
۲) مسأله دارای جواب‌های بهینه‌ی چندگانه است.
۳) فقط مبدأ با مقدار تابع هدف صفر جواب بهینه‌ی مسأله است.
۴) در مورد جواب بهینه‌ی مسأله چیزی نمی‌توان گفت.

۳۰- در یک مدل خطی با منطقه قابل قبول غیرتهی، اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیت‌ها باشد، آنگاه: (صنایع۷۹)

۱) مسأله جواب بهینه یگانه دارد.

۲) مسأله جواب بهینه چندگانه دارد.

۳) مسأله جواب بهینه تباهیده دارد.

۴) ممکن است جواب بهینه یگانه یا چندگانه باشد.

۳۱- در یک مدل خطی اگر مقدار بهینه تابع هدف یک مقدار محدود باشد، آنگاه: (صنایع۷۹)

۱) x^* مقادیر محدود دارد.

۲) منطقه قابل قبول محدود است.

۳) x^* می‌تواند مقادیر نامحدود داشته باشد.

۴) منطقه قابل قبول نامحدود است.

۳۲- چنانچه فضای موجه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نامحدود باشد در این صورت: (صنایع۸۲)

۱) مسأله جواب بهینه ندارد.

۲) مسأله اصلاً جواب قابل قبول ندارد.

۳) لزوماً جواب‌های مسأله نیز نامحدود هستند.

۴) ممکن است جواب بهینه نیز نامحدود باشد.

۳۳- ریشه‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر چگونه است؟ (سیستم ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= ۲x_۱ + x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & x_۱ - x_۲ \le ۱۰ \\ & ۲x_۱ - x_۲ \le ۴۰ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

۱) جواب ناتباهیده است.

۲) جواب بهینه بیکران است.

۳) فضای جواب بیکران است.

۴) جواب بهین دگرین است.

۳۴- اگر دو مسأله ۱ و ۲ را درنظر بگیریم کدام گزینه صحیح است؟ (صنایع۸۷)

$$(۱) \max \lambda \quad \text{s.t.} \quad Ax - b\lambda \le ۰, \; -\lambda \le ۰, \; \lambda \le ۱$$

$$(۲) \max c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \le b$$

۱) اگر جواب بهینه مسأله ۱ برابر با صفر باشد آنگاه مسأله ۲ جواب ندارد.

۲) اگر جواب بهینه مسأله ۲ برابر با صفر باشد آنگاه مسأله ۱ جواب ندارد.

۳) اگر جواب بهینه مسأله ۱ برابر با یک باشد آنگاه جواب مسأله ۲ برابر با صفر است.
۴) اگر جواب بهینه مسأله ۲ برابر با یک باشد آنگاه جواب مسأله ۱ برابر با صفر است.

۳۵- در کدام گزینه شرط لازم و کافی روی s و t بطوری که مسأله زیر یک جواب، بهینه متناهی داشته باشد صحیح است؟ (سیستم ۸۹)

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & sx_1 + tx_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

۱) $st < 0$ ۲) $st \le 0$ ۳) $s \ge 0, t \ge 0$ ۴) $s > 0, t > 0$

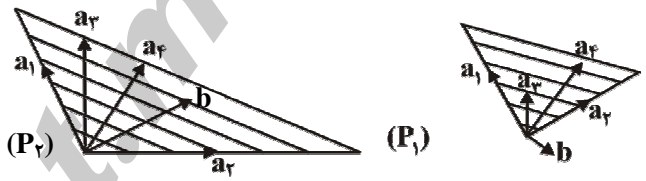
۳۶- در مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر

$$\begin{aligned} & \max(x_1 + x_2) \\ \text{s.t.} \quad & kx_1 + x_2 \le p \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

به ازای کدام مقادیر زیر مسأله دارای جواب بیکران است؟ (صنایع ۹۰)

۱) $k = 0 \ , \ p = -1$ ۲) $k = 1 \ , \ p = -1$
۳) $k = -1 \ , \ p = 0$ ۴) $k = 1 \ , \ p = 1$

۳۷- فضای ایجاب برای دو دستگاه معادله خطی نشان داده شده است که در آن منظور از a_j بردار ستونی ضرایب مربوط به x_j و b بردار ستونی مقدار سمت راست است. در این‌صورت: (صنایع ۸۱)

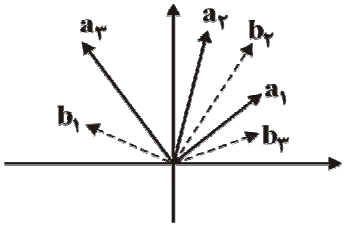


۱) هیچ‌یک دارای جواب موجه نیستند.
۲) P_1 دارای جواب موجه نیست اما P_2 دارای جواب موجه است.
۳) P_1 دارای جواب موجه است اما P_2 دارای جواب موجه نیست.
۴) با استفاده از فضای ایجاب نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۳۸- فرض کنید ناحیه‌ی شدنی مسأله برنامه‌ریزی خطی به‌صورت زیر:

$$X=\{x \mid a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 \le b\ ,\ x \ge 0\}$$

تعریف شده باشد با توجه به شکل کدام جواب صحیح است؟ (سیستم۸۲)



۱) به ازاء $b=b_1$ و $b=b_3$ مسأله جواب شدنی ندارد.
۲) به ازاء $b=b_2$ و $b=b_3$ مسأله جواب شدنی دارد.
۳) به ازاء $b=b_2$ مسأله جواب شدنی دارد و به ازاء $b=b_1$ و $b=b_3$ مسأله جواب شدنی ندارد.
۴) به ازاء $b=b_2$ مسأله جواب شدنی ندارد و به ازاء $b=b_1$ و $b=b_3$ مسأله جواب شدنی دارد.

یک شرکت تولید کننده صندلی چوبی، سه کارگاه در سه شهر مختلف دارد. این شرکت چهار نوع صندلی چوبی تولید می‌کند و به فروش می‌رساند. ظرفیت کارگاه iام در هر ماه برابر M_i ماشین ساعت کار ماشین و N_i نفر ساعت کار دستی است، $i=1,2,3$. هر کارگاه می‌تواند هر چهار نوع صندلی را با هر ترکیبی تولید کند. ماشین‌آلات و ابزار کارگاه‌ها با یکدیگر اختلاف دارند. چنانچه صندلی نوع j در کارگاه i تولید شود، برای هر صندلی k_{ij} ماشین ساعت کار ماشین و p_{ij} نفر ساعت کاردستی از ظرفیت این کارگاه لازم دارد، $i=1,2,3$ و $j=1,2,3$. تقاضای ماهیانه برای صندلی نوع j این شرکت برابر D_j صندلی تخمین زده شده است و سیاست شرکت این است که جمع تولید ماهانه صندلی نوع j در سه کارگاه از D_j بیشتر نشود. برای اینکه فرسودگی ماشین‌آلات در سه کارگاه تقریباً یکسان باشد، سیاست شرکت این است که نسبت ماشین ساعت ظرفیت استفاده نشده در هر کارگاه به کل ظرفیت ماشین ساعت آن کارگاه برای سه کارگاه یکسان باشد. سود حاصل از فروش هر صندلی نوع j، اگر در کارگاه i تولید شود، برابر C_{ij} ریال می‌باشد، شرکت می‌خواهد بداند که در هر ماه چه تعداد صندلی از هر نوع در کارگاه تولید کند تا در قالب محدودیت‌های ظرفیت، تقاضای بازار و فرسودگی یکسان ماشین‌آلات، سود کل ماهیانه شرکت حداکثر شود. مدل برنامه‌ریزی خطی این مسأله را درنظر بگیرید، در این مدل از متغیرهای زیر استفاده می‌شود:

$x_{ij}=$ تعداد صندلی نوع j که در کارگاه i در هر ماه تولید می‌شود، $i=1,2,3$ و $j=1,2,3,4$

$S_i=$ ماشین ساعت ظرفیت استفاده نشده در کارگاه i در هر ماه $i=1,2,3$

به هریک از سؤالات ۳۹ تا ۴۳ مستقل از هم جواب دهید:

۳۹- تابع هدف مدل برنامه‌ریزی خطی این مسأله کدام است؟ (صنایع۷۲)

۱) $\text{Max } z=\sum_{i=1}^{3} S_i$

۲) $\text{Max } z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} \text{Min}\left\{\frac{M_i}{K_{ij}},\frac{N_i}{P_{ij}}\right\}C_{ij}$

۳) $\text{Max } z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} \frac{M_i}{K_{ij}}C_{ij}$

۴) $\text{Max } z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} \frac{M_i}{K_{ij}}C_{ij}X_{ij}$

۴۰- کدام‌یک از روابط زیر از محدودیت‌های مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله است؟ (صنایع۷۲)

۱) $\sum_{j=1}^{4} k_{ij}x_{ij} + S_i = M_i \quad i = 1,2,3$

۲) $\sum_{j=1}^{4} k_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{4} p_{ij}x_{ij} = M_i + N_i \quad i = 1,2,3$

۳) $\sum_{j=1}^{4} \frac{M_i}{k_{ij}} \le x_{ij} \quad i = 1,2,3$

۴) $\sum_{j=1}^{4} \frac{M_i}{k_{ij}} \ge x_{ij} \quad i = 1,2,3$

۴۱- کدام‌یک از روابط زیر از محدویت‌های مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله است؟ (صنایع۷۲)

۱) $\sum_{i=1}^{3} \frac{M_i}{k_{ij}} \ge D_j \quad j = 1,2,3,4$

۲) $\sum_{i=1}^{3} \frac{M_i}{k_{ij}} \le D_j \quad j = 1,2,3,4$

۳) $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \le D_j \quad j = 1,2,3,4$

۴) $\sum_{i=1}^{3} x_{ij} \ge D_j \quad j = 1,2,3,4$

۴۲- کدام‌یک از روابط زیر از محدودیت‌های مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله است؟ (صنایع۷۲)

۱) $S_1 = S_2 \ , \ S_2 = S_3$

۲) $\frac{S_1}{N_1} = \frac{S_2}{N_2}$

۳) $M_2S_1 - M_1S_2 = 0$

۴) $\frac{S_1}{\sum_{j=1}^{4} k_{1j}} = \frac{S_2}{\sum_{j=1}^{4} k_{2j}}$

۴۳- زمان تولید محصول (۱) نصف زمان تولید محصول (۲) و $\frac{2}{3}$ زمان تولید محصول (۳) است. اگر موسسه‌ای تمام زمان خود را صرف تولید محصول (۲) کند، قادر به تولید حداکثر ۵۰۰ واحد از این محصول خواهد بود. محدودیتی که مسأله فوق را بیان می‌کند عبارت است از: (سیستم۸۷)

۱) $2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 2000$

۲) $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1500$

۳) $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 2000$

۴) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 1500$

۴۴- در دو میدان نفتی در خلیج فارس نسبت گاز به نفت به ترتیب $1000\frac{scf}{stb}$ و $4000\frac{scf}{stb}$ بوده و سود خالص آنها به ترتیب ۱۰ و ۱۲ دلار در هر بشکه می‌باشد. اگر حداکثر نسبت گاز به نفت قابل عبور از لوله‌ها $2000\frac{scf}{stb}$ و حداقل خوراک پالایشگاه $60000\frac{stb}{d}$ باشد. مدل برنامه‌ریزی خطی استخراج بهینه نفت کدام است؟ (صنایع ۸۹)

۱)
$$\begin{aligned} &Max\ Z = 10x_1 + 12x_2 \\ &x_1 + x_2 \geq 60000 \\ &1000x_1 + 4000x_2 \leq 2000 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۲)
$$\begin{aligned} &Max\ Z = 10x_1 + 12x_2 \\ &x_1 + x_2 \geq 60000 \\ &1000x_1 + 4000x_2 \leq 2000(x_1 + x_2) \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۳)
$$\begin{aligned} &Max\ Z = 10x_1 + 12x_2 \\ &0.5x_1 + 2x_2 \geq 60000 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۴)
$$\begin{aligned} &Max\ Z = 10x_1 + 12x_2 \\ &x_1 + x_2 \geq 2000 \\ &1000x_1 + 4000x_2 \leq 6000 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۴۵- یک فروشگاه زنجیره‌ای با توجه به تعداد مشتریان در روزهای مختلف هفته نیاز به صندوقدار، مطابق جدول زیر دارد، برحسب قانون کار هر صندوقدار در ازای ۵ روز کار متوالی ۲ روز به مرخصی می‌رود. اگر متغیر x_i تعداد افرادی باشد که در روز i مشغول به کار می‌شوند، تعریف شود، در این صورت محدودیت تعداد افرادی که در روز شنبه مشغول به کار هستند عبارت است از: (سیستم ۸۹)

روز	i	تعداد صندوقدار مورد نیاز
شنبه	۱	۱۵
یکشنبه	۲	۱۱
دوشنبه	۳	۱۲
سه‌شنبه	۴	۱۷
چهارشنبه	۵	۱۳
پنجشنبه	۶	۱۴
جمعه	۷	۹

۱) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 15$

۲) $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 15$

۳) $x_1 \geq 15$

۴) $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 15$

۴۶- ایستگاه اورژانس تهران در چهار شیفت روزانه خود به حداقل افراد زیر نیازمند است. افراد این ایستگاه می‌توانند ۱۲ ساعت و یا ۱۸ ساعت متوالی کار کنند. اگر x_i و y_i را تعداد افرادی بدانیم که قرار است به ترتیب ۱۲ ساعت و یا ۱۸ ساعت کار کرده و کار خود را از شیفت i شروع کنند در این صورت کدام محدودیت زیر در مدل‌سازی مسأله موجود است؟ (سیستم ۹۰)

شیفت	ساعت کاری	نفرات مورد نیاز
۱	۱۲ شب - ۶ صبح	۱۲
۲	۶ صبح - ۱۲ ظهر	۸
۳	۱۲ ظهر - ۶ عصر	۶
۴	۶ عصر - ۱۲ شب	۱۵

۱) $x_2 + x_3 + y_3 + y_1 + y_2 \geq 6$ ۲) $x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_4 \geq 8$

۳) $x_1 + x_2 + x_3 + y_2 + y_3 \geq 12$ ۴) $x_2 + x_4 + y_1 + y_4 + y_3 \geq 15$

۴۷- یک محصول مونتاژ از دو قطعه‌ی A و B تشکیل می‌گردد. اگر x_A و x_B میزان تولید این قطعات باشند و z میزان تولید محصول مونتاژ شده باشد، تابع هدف در این مدل ماکزیمم میزان تولید محصول مونتاژ کدام است؟ (صنایع ۸۱)

۱) $\max\ z = x_A + x_B$ ۲) $\min\ z = \max\{x_A, x_B\}$

۳) $\max\ z = \min\{x_A, x_B\}$ ۴) $\max\ z = \min\{x_A + x_B\}$

۴۸- برای تهیه یک کالا از دو قطعه (۱) و سه قطعه (۲) استفاده می‌شود، تابع هدف مسأله جهت بیشترین تولید از این کالا کدام است؟ (صنایع ۸۹)

۱) $\max z = 3x_1 + 2x_2$ ۲) $\max z = 2x_1 + 3x_2$

۳) $\max z = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3}$ ۴) $\max z = \min[\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}]$

۴۹- یک محصول از مونتاژ سه قطعه A، B و C ساخته می‌شود. جهت محصول مونتاژ شده به ۲ قطعه از نوع A یک قطعه از نوع B و ۳ قطعه از نوع C نیاز است. اگر x_A، x_B و x_C به‌ترتیب مقدار تولید هر یک از این سه قطعه بوده و هدف افزایش محصول تکمیل شده باشد، تابع هدف مدل عبارت است از: (سیستم ۸۷)

۱) $\max\ z = \min\{x_A, x_B, x_C\}$

۲) $\max\ z = \min\{2x_A, x_B, 3x_C\}$

۳) $\max\ z = \min\{x_A + x_B + x_C\}$

۴) $\max\ z = \min\{\frac{x_A}{2}, x_B, \frac{x_C}{3}\}$

۵۰-

دپارتمان	ظرفیت (ساعت)	سرعت تولید $\left(\frac{\text{تعداد}}{\text{ساعت}}\right)$	
		تکه ۱	تکه ۲
۱	۱۵۰	۱۰	۱۵
۲	۳۰۰	۱۵	۱۳

محصولی از دو تکه ۱ و ۲ تشکیل شده است. چنانچه دپارتمان ۱ و ۲ مایل به تولید حداکثر محصول بوده و در عین حال مایل به داشتن حداقل قطعات اضافی باشند در این صورت این مسأله دارای: (صنایع۸۲)

۱) چهار متغیر و چهار محدودیت (بدون درنظر گرفتن شرایط مثبت بودن) می‌باشد.

۲) دو متغیر و دو محدودیت (بدون درنظر گرفتن شرط مثبت بودن) می‌باشد.

۳) پنج متغیر و چهار محدودیت (بدون درنظر گرفتن شرط مثبت بودن) می‌باشد.

۴) چهار متغیر و دو محدودیت (بدون درنظر گرفتن شرط مثبت بودن) می‌باشد.

۵۱- مسأله زیر را درنظر بگیرید:

$$\text{Max } CX$$
$$S.t: AX \le b$$
$$X \ge 0$$

فرض کنید که یک عضو بردار b، مثلاً b_i یک واحد افزایش می‌یابد $(b_i \to b_i + 1)$، فضای مورد قبول چه تغییری می‌کند؟ (صنایع۷۲)

۱) بزرگتر می‌شود. ۲) کوچکتر می‌شود.

۳) تغییر نمی‌کند. ۴) به ضرایب X بستگی دارد.

۵۲- دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی (۱) و (۲) را درنظر بگیرید:

$$z = \min u(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1)$$
$$s.t.\{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le E\}$$
$$z' = \min u(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2)$$
$$s.t.\{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le E'\}$$

این دو مسأله دارای تابع هدفی غیرخطی و یکسان هستند. اگر $E' > E$ باشد، آن‌گاه همواره می‌توان نتیجه گرفت: (سیستم۸۳)

۱) $z' < z$ ۲) $z' \ge z$ ۳) $z' > z$ ۴) $z' \le z$

۵۳- دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$z_1 = \text{Min } f(x_1,...,x_n) \qquad \text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \le E_1 \quad (1)$$

$$z_2 = \text{Min } f(x_1,...,x_n) \qquad \text{s.t. } \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \le E_2 \quad (2)$$

اگر $E_2 > E_1$ باشد، آنگاه: (سیستم ۹۰)

۱) $z_2 < z_1$ ۲) $z_2 \le z_1$ ۳) $z_2 > z_1$ ۴) $z_2 \ge z_1$

۵۴- مسأله برنامه‌ریزی ریاضی (A) و (B) را در نظر بگیرید:

$$z = \min f(x_1,...,x_n) \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \le E & (A) \\ x_i \ , P_i \ge 0 & i = 1,...,n \end{cases}$$

$$z' = \min f(x_1,...,x_n) \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} P_i' x_i \le E & (B) \\ x_i \ , P_i' \ge 0 & i = 1,...,n \end{cases}$$

اگر $P_i' \ge P_i \ , i = 1,...,n$ باشد، آن‌گاه: (صنایع۸۴)

۱) $z \ge z'$ ۲) $z \le z'$ ۳) $z < z'$ ۴) $z > z'$

۵۵- دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر را درنظر بگیرید:

$$z_1 = \max u(x_1,...,x_n) \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le E \\ x_i \ge 0 \quad i = 1,...,n \end{cases}$$

$$z_2 = \max u(x_1,...,x_n) \qquad \text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i' x_i \le E \\ x_i \ge 0 \quad i = 1,...,n \end{cases}$$

اگر $p_i' \ge p_i \ge 0 \quad i = 1,...,n$ باشد، آن‌گاه: (صنایع۸۵)

۱) $z_2 > z_1$ ۲) $z_1 > z_2$

۳) $z_1 \ge z_2$ ۴) هیچ ارتباط مشخصی بین z_1 و z_2 وجود ندارد.

۵۶- دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی ۱ و ۲ را درنظر بگیرید:

$$z = \min c_1 x_1 + ... + c_n x_n \quad (1) \qquad \text{s.t.} \{ g_i(x_1,...,x_n) \ge b_i \ , \ i = 1,...,m \}$$

$$z' = \min c_1' x_1 + ... + c_n' x_n \quad (2) \qquad \text{s.t.} \{ g_i(x_1,...,x_n) \ge b_i \ , \ i = 1,...,m \}$$

این دو مسأله دارای محدودیت‌های غیرخطی و یکسان می‌باشند. اگر $c'_j > c_j \geq 0$ و $x^\circ = \begin{cases} x_1^\circ \\ \vdots \\ x_n^\circ \end{cases}$ جواب بهینه مسأله ۱ و $x^{\circ\circ} = \begin{cases} x_1^{\circ\circ} \\ \vdots \\ x_n^{\circ\circ} \end{cases}$ جواب بهینه مسأله ۲ باشد آن گاه: (صنایع۸۳)

۱) $c'_1x_1^\circ + \dots + c'_nx_n^\circ \geq c_1x_1^{\circ\circ} + \dots + c_nx_n^{\circ\circ}$

۲) $c'_1x_1^{\circ\circ} + \dots + c'_nx_n^{\circ\circ} \leq c'_1x_1^\circ + \dots + c'_nx_n^\circ$

۳) $c'_1x_1^{\circ\circ} + \dots + c'_nx_n^{\circ\circ} \geq c'_1x_1^\circ + \dots + c'_nx_n^\circ$

۴) هیچ‌کدام

۵۷- اگر جواب بهینه‌ی یک مسأله ماکزیمم کردن با ضرایب c' برابر x' و جواب بهینه‌ی همان مسأله با ضرایب c'' برابر x'' باشد خواهیم داشت: (صنایع۸۳)

۱) $(c'-c'')(x''-x') \geq 0$ ۲) $(c'-c'')(x'-x'') \leq 0$

۳) $(c'-c'')(x'-x'') \geq 0$ ۴) $(c'-c'')(x''-x') \leq 0$

۵۸- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Min } cx \\ &\text{s.t.} \quad Ax \leq b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

اگر برای $c = c_1$، x_1 جواب بهینه مسأله بالا باشد و برای $c = c_2$، x_2 جواب بهینه مسأله بالا باشد، آنگاه: (سیستم ۹۰)

۱) $(c_1-c_2)(x_1-x_2) \leq 0$ ۲) $(c_1-c_2)(x_1-x_2) = 0$

۳) $(c_1-c_2)(x_1-x_2) \geq 0$ ۴) $(c_2-c_1)(x_1x_2) \geq 0$

۵۹- مسأله زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max } CX \\ &\text{S.t}: AX \leq b \\ &\qquad X \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید که محدودیت iام از مسأله حذف شده است. جواب بهینه چه تغییری می‌کند؟ (صنایع۷۲)

۱) می‌تواند بدتر شود. ۲) می‌تواند بهتر شود.

۳) تغییری نمی‌کند. ۴) حتماً بهتر می‌شود.

۶۰- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad Z = CX \\ &\text{S.t}: AX \le b \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر یکی از محدودیت‌های مسأله فوق را حذف کنیم: (صنایع۷۴)

۱) مقدار تابع هدف و منطقه قابل قبول کوچکتر نمی‌شود.

۲) مقدار تابع هدف و منطقه قابل قبول کوچکتر می‌شود.

۳) مقدار تابع هدف بزرگتر، ولی منطقه قابل قبول کوچکتر می‌شود.

۴) مقدار تابع هدف کوچکتر، ولی منطقه قابل قبول بزرگتر می‌شود.

۶۱- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید $\{\text{Min } cx \mid Ax \ge b \,,\, x \ge 0\}$ فرض کنید این مسأله دارای جواب متناهی باشد. چنانچه یک محدودیت از مسأله فوق حذف شود، جواب بهینه چه تغییری می‌کند؟ (صنایع۷۵)

۱) نمی‌تواند بدتر شود. ۲) بهتر می‌شود.

۳) نمی‌تواند بهتر شود. ۴) بدتر می‌شود.

۶۲- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\max \quad z = cx$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

اگر یکی از محدودیتهای مسأله بالا را حذف کنیم، مقدار تابع هدف ... (سیستم۸۱)

۱) و ناحیه امکان‌پذیر بزرگتر می‌شود.

۲) و ناحیه امکان‌پذیر کوچک‌تر نمی‌شود.

۳) بزرگ‌تر و ناحیه امکان‌پذیر کوچک‌تر می‌شود.

۴) کوچک‌تر نمی‌شود و ناحیه امکان‌پذیر بزرگ‌تر نمی‌شود.

۶۳- اگر تعداد متغیرهای تصمیم یک مسأله برنامه‌ریزی خطی افزایش یابد، آنگاه مقدار بهینه تابع هدف این مسأله جدید: (صنایع۷۷)

۱) بدتر نمی‌شود. ۲) بهتر می‌شود. ۳) بدتر می‌شود. ۴) بهتر نمی‌شود.

۶۴- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\min 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge 25 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \ge 15 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\min 5x_1 + 3x_2 \quad \text{s.t} \begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 25 \\ 2x_1 + x_2 \ge 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \qquad (2)$$

اگر z_1^* و z_2^* به ترتیب جواب‌های بهینه مسائل (۱) و (۲) باشند، آن‌گاه داریم: (سیستم۸۱)

۱) $z_1^* = z_2^*$ ۲) $z_1^* = 45$ ۳) $z_1^* \ge z_2^*$ ۴) $z_1^* \le z_2^*$

۶۵- دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی (۱) و (۲) را درنظر بگیرید. درصورتی که هر دو مسأله دارای جواب قابل قبول باشند، در این‌صورت خواهیم داشت:(سیستم۸۳)

$$z = \min f(x_1, \dots, x_n)$$
$$\text{s.t.}\{g_i(x_1, \dots, x_n) \ge b_i \quad i = 1, \dots, m\} \qquad (1)$$
$$z' = \min f(x_1, \dots, x_n) + dx_{n+1}$$
$$\text{s.t.}\{g_i(x_1, \dots, x_n) + K_i x_{n+1} \ge b_i \quad i = 1, \dots, m\} \qquad (2)$$

۱) $z' \le z$ ۲) $z' < z$ ۳) $z' > z$ ۴) مشخص نیست.

۶۶- در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تابع هدف به فرم ماکزیمم است، افزایش یک متغیر جدید به متغیرهای مسأله: (سیستم۸۵)

۱) تغییری در مقدار تابع هدف بهینه نمی‌دهد.
۲) مقدار تابع هدف بهینه را کاهش نمی‌دهد.
۳) مقدار تابع هدف بهینه را از افزایش نمی‌دهد.
۴) هیچ‌کدام

۶۷- اگر در مسائل برنامه‌ریزی خطی یکی از محدودیت‌ها را حذف و یک متغیر تصمیم جدید به آن اضافه گردد آن‌گاه: (صنایع۸۲)

۱) هیچ چیز تغییر نمی‌کند.
۲) فضای قابل قبول کوچک‌تر و مقدار تابع هدف بدتر، نمی‌شود.
۳) فضای قابل قبول کوچک‌تر و مقدار تابع هدف بدتر، می‌شود.
۴) فضای قابل قبول بزرگ‌تر و مقدار تابع هدف بهتر، می‌شود.

۶۸- هرچه به تعداد محدودیت‌های کارکردی یک مسأله اضافه کنیم، مقدار بهینه تابع هدف آن: (صنایع۷۷)

۱) بهتر می‌شود. ۲) بدتر می‌شود. ۳) بهتر نمی‌شود. ۴) بدتر نمی‌شود.

۶۹- با کدام شیوه نمی‌توان منطقه قابل قبول (Feasible region) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی را افزایش داد؟ (صنایع۸۴)

۱) افزایش تعداد محدودیت‌ها

۲) تغییر در اعداد سمت راست

۳) با تغییر در ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در محدودیت‌ها

۴) با تبدیل علامت محدودیت‌های کوچک‌تر یا مساوی یا بزرگ‌تر یا مساوی

۷۰- یک برنامه‌ریزی ریاضی (با هدف ماکسیمم‌سازی) را درنظر بگیرید. مقدار بهینه تابع هدف این مسأله برابر با z است. سپس یک محدودیت جدید به این مسأله اضافه شده است. مقدار بهینه تابع هدف جدید z^* است، کدام مورد صحیح است؟ (سیستم۸۸)

۱) $z \le z^*$ ۲) $z^* \le z$ ۳) $z^* < z$ ۴) $z < z^*$

۷۱- در مدل:

$$\begin{aligned} &\max\ F(x) \\ &s.t: AX \ge b \\ &\quad BX \le d \\ &\quad X \ge 0 \end{aligned}$$

اگر به‌جای $\ge$ و $\le$ همه‌جا مساوی قرار دهیم، آنگاه مقدار بهینه تابع هدف: (صنایع۷۸)

۱) بدتر نمی‌شود. ۲) بهتر نمی‌شود. ۳) بهتر می‌شود. ۴) بدتر می‌شود.

۷۲- در مدل:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad z = cx \\ &\text{s.t.} \quad Ax \ge b \quad (I) \\ &\qquad Dx \le d \quad (II) \\ &\qquad x \ge 0 \end{aligned}$$

اگر در محدودیت‌های (I) و (II) به‌جای $\ge$ و $\le$ علامت مساوی قرار دهیم آن‌گاه مقدار بهینه تابع هدف: (صنایع۸۵)

۱) بهتر نمی‌شود. ۲) بدتر نمی‌شود. ۳) بهتر می‌شود. ۴) بدتر می‌شود.

۷۳- اگر A ناحیه امکان‌پذیر مربوط به یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی باشد و بیشترین مقدار تابع f بر روی A، ۷ و بیشترین مقدار تابع g بر روی A، ۵ باشد. بیشترین مقدار تابع $f+g$ بر روی ناحیه A: (صنایع۷۵)

۱) حتماً کوچکتر یا مساوی ۱۲ است.
۲) حتماً بزرگتر یا مساوی ۵ است.
۳) حتماً کوچکتر یا مساوی ۷ است.
۴) حداقل ۱۲ است.

۷۴- اگر دو مسأله برنامه‌ریزی ریاضی یکی با هدف $\max\ f(x)$ و دیگری با هدف $\max\ g(x)$ ناحیه امکان‌پذیر آنها یکی باشد. آنگاه تابع هدف $\max\ h(x)=f(x)+g(x)$ بر روی همان ناحیه امکان‌پذیر کدام شرط زیر را داراست. (صنایع۷۶)

۱) $\max\ h(x)\geq \max\ f(x)$
۲) $\max\ h(x)\geq \max\ g(x)$
۳) $\max\ h(x)\leq \max\ f(x)+\max\ g(x)$
۴) $\max\ h(x)=\max\ f(x)+\max\ g(x)$

۷۵- مسأله زیر داده شده است:

$$\max\ z=2x_1+6x_2-x_3-3x_4+8x_5-4x_6+5x_7+7x_8$$
$$s.t:\{\text{محدودیت داده شده}\}$$
$$-5\leq x_j\leq 5\quad,\quad j=1,\dots,8$$

کدام گزینه در مورد مقدار بهینه تابع هدف (z^*) صادق است؟ (صنایع ۷۸)

۱) $z^*\leq 180$
۲) $z^*\geq 300$
۳) $z^*\leq -220$
۴) $z^*\geq 260$

۷۶- اگر A یک ماتریس با ۴ سطر و ۵ ستون باشد، حد بالای مقدار بهینه تابع هدف مسأله زیر کدام گزینه می‌باشد؟ (سیستم ۸۹)

$$\text{Max } z=5x_1-3x_2+4x_3-4x_4+x_5$$
$$s.t.\quad Ax\leq \bar{b}$$
$$1\leq x_j\leq 8,\ j=1,2,3,4,5$$

۱) ۱۰
۲) ۷۳
۳) ۱۳۶
۴) ۸۰

۷۷- اگر داشته باشیم:

$$\min\quad z=2x_1-6x_2-x_3+3x_4+8x_5-4x_6$$
$$-5\leq x_j\leq 10\qquad j=1,\dots,6$$

در این حالت مقدار بهینه تابع هدف چقدر می‌باشد؟ (سیستم۸۱)

۱) ۳۰۰
۲) ۱۶۵-
۳) ۳۲۰-
۴) ۴۸۰

۷۸- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\max \quad z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \le b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_j \ge 0 \ , \ j = 1,\dots,n \end{cases}$$

که در آن کلیه مقادیر سمت راست محدودیت‌ها مثبت بوده و جهت محدودیت‌ها کوچک‌تر یا مساوی می‌باشد. این مسأله ... . (سیستم۸۱)

۱) حتماً نامحدود است. ۲) امکان‌ناپذیر است.

۳) حتماً امکان‌پذیر است. ۴) ممکن است امکان‌پذیر باشد.

۷۹- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید: (سیستم۸۳ و ۸۵)

$$\max \ f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ge 0 \ , \ i = 1,2,3,\dots,m \\ x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n \end{cases}$$

۱) این مسأله حتماً امکان‌پذیر است.

۲) این مسأله ممکن است امکان‌پذیر باشد.

۳) اگر یکی از مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، مثلاً b_k یک واحد افزایش یابد، ناحیه امکان‌پذیر تغییری نخواهد کرد.

۴) اگر یکی از مقادیر سمت راست محدودیت‌ها، مثلاً b_k یک واحد افزایش یابد، ناحیه امکان‌پذیر حتماً بزرگ‌تر می‌شود.

۸۰- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید.

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{s.t} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \ , \ i = 1,\dots,n$$

$$x_j \ge 0 \ , \ j = 1,..,n$$

تحت چه شرایطی منطقه موجه شامل مبدأ مختصات است؟ (سیستم۸۸)

۱) درصورتی که تابع هدف از نوع می‌نیمم‌سازی باشد.

۲) درصورتی که تابع هدف از نوع ماکسیمم‌سازی باشد.

۳) منطقه موجه همواره مبدأ مختصات را شامل می‌شود.

۴) درصورتی که $b_i \geq 0 \, , \, i = 1,...,n$

۸۱- مسأله برنامه‌ریزی خطی **P** به شرح زیر مفروض است:

$$\max z = C^T x \quad A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \, , \; \underset{\sim}{x} \geq 0 \, , \; \underset{\sim}{b} \geq 0 \, , A = m \times n$$

سیستم $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ با اضافه کردن متغیرهای کمکی **(slack)** به سیستم $D\underset{\sim}{x} \leq \underset{\sim}{b}$ که در آن $(k < m) D = m \times k$ می‌باشد به‌دست آمده است، در ارتباط با این مسأله کدام گزینه درست است؟ (صنایع۸۵)

۱) مسأله **P** همواره دارای جواب شدنی می‌باشد.

۲) مسأله **P** ممکن است فاقد جواب شدنی باشد.

۳) مسأله **P** همواره دارای جواب بهینه محدود می‌باشد.

۴) وجود حل شدنی در مسائل **P** بستگی به علامت مولفه‌های ماتریس **A** دارد.

۸۲- اگر تمام ضرایب یکی از متغیرها در محدودیت‌های اصلی مدل موردنظر غیرمثبت باشند، کدام عبارت صحیح است؟ (صنایع۸۷)

۱) در ارتباط با فضای جواب نمی‌توان بحث کرد.

۲) فضای جواب بیکران و لزوماً جواب بهینه کراندار است.

۳) فضای جواب بیکران و لزوماً جواب بهینه بیکران است.

۴) فضای جواب بیکران ولی ممکن است جواب بهینه کراندار باشد.

۸۳- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\{\max Z = CX \mid AX \leq b \, , \, b > 0 \, , \, x \geq 0\}$$

که در آن کلیه مقادیر سمت راست محدودیت‌ها مثبت بوده و جهت علامت محدودیت‌ها، کوچکتر یا مساوی می‌باشند. (صنایع۷۵)

۱) شرط لازم و کافی برای اینکه مسئله بالا نامحدود نشود، این است که $a_{ij} > 0$ محدود باشد. (برای تمام **i** و **j**)

۲) همواره جواب بهینه محدود دارد.

۳) شرط لازم برای اینکه مسئله بالا نامحدود نشود، این است که $a_{ij} > 0$ محدود باشد. (برای تمام **i** و **j**)

۴) شرط کافی برای اینکه مسئله بالا نامحدود نشود، این است که $a_{ij} > 0$ محدود باشد. (برای تمام **i** و **j**)

۸۴- اگر $\mathbf{A}$ یک ماتریس $\mathbf{m \times n}$ و $\mathbf{b}$ یک بردار $\mathbf{m}$ بعدی باشد کدام عبارت صحیح است؟ (سیستم۸۷)

۱) یک جواب برای سیستم $\mathbf{Ax \le b}$ به‌دست آوریم معادل این است که یک جواب غیرمنفی برای سیستم $\mathbf{Ax = b}$ به‌دست آوریم.

۲) یک جواب غیرمنفی برای سیستم $\mathbf{Ax \le b}$ به‌دست آوریم معادل این است که یک جواب برای سیستم $\mathbf{Ax = b}$ به‌دست آوریم.

۳) یک جواب برای سیستم $\mathbf{Ax \le b}$ به‌دست آوریم معادل این است که یک جواب سیستم $\mathbf{Ax = b}$ به‌دست آوریم.

۴) یک جواب صحیح غیرمنفی برای سیستم $\mathbf{Ax \le b}$ به‌دست آوریم معادل این است که یک جواب غیرمنفی برای سیستم $\mathbf{Ax = b}$ به‌دست آوریم.

پاسخنامه

۱- مسأله برنامه‌ریزی خطی و دستکاری مسأله

برنامه‌ریزی خطی شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضی است که با مؤثرترین روش‌های اختصاص دادن منابع محدود برای فعالیت‌های شناخته شده‌ای برای برآوردن هدف خاص (حداکثر یا حداقل کردن) سروکار دارد. برنامه‌ریزی خطی تکنیکی بسیار قوی برای فرموله نمودن و مدل‌بندی مسائلی است که به تخصیص منابع محدود بین فعالیت‌های معلوم به منظور نیل به هدفی مطلوب مربوط می‌شود. اجزاء اساسی تشکیل‌دهنده مدل ریاضی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی عبارتند از:

۱) متغیرهای تصمیم: فعالیت‌های مجهولی که بایستی تعیین شوند.

۲) قیود یا محدودیت‌ها: مدل باید متضمن قیودی باشد که متغیرهای تصمیم را در حد مقادیر شدنی آن محدود کند، این قیود به شرایط موجود در مسأله برمی‌گردد.

۳) تابع هدف: تابعی که یک رابطه خطی بین متغیرها جهت معرفی هدف مسأله بیان می‌کند و عموماً بیانگر یک سری مضامین مانند سود، هزینه، زمان و... می‌باشد و نوع این تابع (بیشینه‌سازی سود و کمینه‌سازی هزینه) برحسب شرایط مسأله تعیین می‌گردد.

فرم متعارفی و استاندارد مسائل می‌نیمم‌سازی و ماکزیمم‌سازی

	مسألهٔ می‌نیمم‌سازی	مسألهٔ ماکزیمم‌سازی
شکل استاندارد	$\min z = cx$ $\text{s.t.}\quad Ax = b$ $x \geq 0$	$\max z = cx$ $\text{s.t.}\quad Ax = b$ $x \geq 0$
شکل متعارفی	$\min z = cx$ $\text{s.t.}\quad Ax \geq b$ $x \geq 0$	$\max z = cx$ $Ax \leq b$ $x \geq 0$

فرضیات برنامه‌ریزی خطی

۱- فرض تناسب: سهم متغیر x_j در هزینه c_jx_j و در iامین محدودیت $a_{ij}x_j$ است یعنی هیچ‌گونه صرفه‌جویی یا درآمدی یا پس‌اندازی بر آن مترتب نیست و همچنین هیچ‌گونه هزینه راه‌اندازی برای شروع فعالیت منظور نمی‌شود. طبق این فرض توان تمام متغیرها باید یک باشد.

۲- فرض جمع‌پذیری: تأثیرات جایگزینی یا متقابل بین فعالیت‌ها وجود ندارد.

۳- فرض بخش‌پذیری یا تقسیم‌پذیری: متغیرها مجازند مقادیر ناصحیح بگیرند.

۴- فرض معین بودن (قطعیت): ضرایب b_i, a_{ij}, c_j همه بطور قطعی معلوم هستند.

دستکاری مسأله برنامه‌ریزی خطی

۱- تبدیل نوع تابع هدف

$$\text{Max } z = cx \Leftrightarrow -\min z = -cx$$

یا

$$\text{Max } z = cx \Leftrightarrow \min -z = -cx$$

۲- تبدیل جهت محدودیتهای نامساوی

$$\leq \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} \geq$$

۳- تبدیل محدودیت تساوی به نامساوی

$$= \Rightarrow \begin{cases} \geq \\ \leq \end{cases}$$

بدین معنی که هر محدودیت تساوی را می‌توان به دو محدودیت نامساوی به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 \geq b_1 \end{cases}$$

بنابراین m محدودیت تساوی را می‌توان به $2m$ محدودیت نامساوی تبدیل کرد:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \end{cases}$$

همچنین با تبدیلات زیر می‌توان تعداد محدودیت‌ها را به $m+1$ کاهش داد:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \end{cases}$$

۴- تبدیل محدودیت نامساوی به تساوی

$$\leq \overset{+s}{\Rightarrow} = ,\; s \geq 0$$

$$\geq \overset{-s}{\Rightarrow} = ,\; s \geq 0$$

۵- مقید کردن متغیرهای آزاد در علامت و نامنفی کردن آنها

الف) $\left.\begin{array}{l} x_j = \underset{\geq 0}{x'_j} - \underset{\geq 0}{x''_j} \\ \text{نامقید} \\ |x_j| = \underset{\geq 0}{x'_j} + \underset{\geq 0}{x''_j} \\ \text{در تابع هدف} \end{array}\right\} \Rightarrow$ نامقید $n \Rightarrow$ مقید به نامنفی بودن $2n$

برای استفاده از $|x_j| = x'_j + x''_j$ باید $c_j \geq 0$ بوده و مسأله می‌نیمم‌سازی باشد (البته در کنکور این مطلب را تا به حال در نظر نگرفته‌اند).

ب) $x'' = \max\limits_{j=1,\dots,n}\{x''_j\} \Rightarrow$ نامقید $n \Rightarrow$ مقید به نامنفی بودن $n+1$

ج) $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i$

$$\Rightarrow x_j = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \dots - a_{in}x_n}{a_{ij}}$$

۶- حذف متغیر با کران بالا یا پائین

$$x_j \geq l_j \Rightarrow \underbrace{x_j - l_j}_{x'_j} \geq 0 \Rightarrow x_j = x'_j + l_j \ , \ x'_j \geq 0$$

$$x_j \leq u_j \Rightarrow \underbrace{u_j - x_j}_{x'_j} \geq 0 \Rightarrow x_j = u_j - x'_j \ , \ x'_j \geq 0$$

۷- حذف قدر مطلق

الف) در محدودیتها:

$$|f(x)| \leq a \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq a \\ f(x) \geq -a \end{cases} \Rightarrow LP$$

$$|f(x)| \geq a \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq a \\ f(x) \leq -a \end{cases} \Rightarrow ILP$$

ب) در تابع هدف:

روش اول:

$$I)\ \text{Min}\,|f(x)| + g(x) \Rightarrow \underset{y = f(x)}{\text{Min}\,|y| + g(x)} \Rightarrow \underset{\substack{y' - y'' = f(x) \\ y', y'' \geq 0}}{\text{Min}\ y' + y'' + g(x)}$$

روش دوم:

$$II)\ \text{Min}\,|f(x)| + g(x) \Rightarrow \underset{z \geq |f(x)|}{\text{Min}\ z + g(x)} \Rightarrow LP$$

$$\text{Max}\,|f(x)|+g(x) \Rightarrow \text{Max } z+g(x) \quad z \le |f(x)| \quad \Rightarrow \text{ILP}$$

۸- توابع هدف مرکب

حالت اول:

$$\text{Max } z=\text{Min}\{f_1,\dots,f_n\} \Rightarrow \text{Max } z=y \quad y\le f_1 \quad \vdots \quad y\le f_n$$

اگر $f_i \to |f_i|$، مسأله حاصل یک مسأله برنامه‌ریزی عدد صحیح خواهد بود.

حالت دوم:

$$\text{Min } z=\text{Max}\{f_1,\dots,f_n\} \Rightarrow \text{Min } z=y \quad y\ge f_1 \quad \vdots \quad y\ge f_n$$

اگر $f_i \to |f_i|$، مسأله حاصل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی خواهد بود.

☺ ۱. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به مورد ۵ دستکاری مسأله، حالت **I**، گزینه ۴ صحیح است. توجه داشته باشید بهتر بود گفته می‌شد به جای $|x_{ij}|$ در تابع هدف و نه x_{ij}، البته با توجه به نامنفی بودن u_i, v_i فرقی نمی‌کند.

☺ ۲. گزینه ۴ صحیح است.

طبق حالت **I** حذف قدر مطلق در تابع هدف، در یک مسأله می‌نیمم‌سازی وقتی تابع هدف دارای قدرمطلقی از یک چندجمله‌ای باشد، داخل قدر مطلق را متغیر آزاد در علامت درنظر گرفته و سپس این متغیر را در محدودیتها بگونه تعریف شده قرار می‌دهیم، حال این متغیر نامقید را به مقید تبدیل می‌کنیم، بکار گرفتن این تبدیل در مسأله **Max**سازی صحیح نیست اما در کنکور مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\text{Max } Z=|2x_1-3x_2| \Rightarrow \text{Max } Z=|y| \quad \text{s.t.} \quad y=2x_1-3x_2 \quad x_1,x_2\ge 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{Max } Z=y_1+y_2 \quad \text{s.t.} \quad y_1-y_2=2x_1-3x_2 \quad x_1,x_2,y_1,y_2\ge 0$$

۳. گزینه ۲ صحیح است.

روش اول:

$$\min\ z=|3x+1| \Rightarrow \begin{array}{l}\min z\\ z\geq|3x+1|\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\min z\\ 3x+1\leq z\\ 3x+1\geq -z\end{array}$$

روش دوم:

$$\begin{array}{l}\min\ z=|y|\\ y=3x+1\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\min\ z=y'+y''\\ y'-y''=3x+1\\ y',y''\geq 0\end{array}$$

۴. گزینه ۱ صحیح است.

$$\begin{array}{ll}\min & 2|x_1|+x_2\\ \text{s.t.} & x_1+x_2\geq 4\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\min\ 2z_1+x_2\\ \text{s.t. } x_1+x_2\geq 4\\ z_1\geq|x_1|\end{array} \Rightarrow \begin{array}{l}\min\ 2z_1\\ \text{s.t. } x_1+x_2\leq 4\\ x_1\leq z_1\\ -x_1\leq z_1\end{array}$$

۵. گزینه ۱ صحیح است.

$$\left\{\begin{array}{l}\min\ t_1+t_2+\dots+t_m\\ \text{s.t. } t_1\geq b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ -t_1\leq b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \vdots\\ t_m\geq b_m-\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\\ -t_m\leq b_m-\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\min\ t_1+t_2+\dots+t_m\\ |b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j|\leq t_1\\ \vdots\\ |b_m-\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j|\leq t_m\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}\min\ t_1+t_2+\dots+t_m\\ t_1\geq|b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j|\\ \ddots\\ t_m\geq|b_m-\sum_{j=1}^{n}a_{mj}x_j|\end{array}\right\} \Rightarrow \min\sum_{i=1}^{m}|b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j|$$

۶. گزینه ۳ صحیح است.

$$\max|3x_1+2x_2| \xrightarrow{I)\,y=3x_1+2x_2} \max|y| \quad y=3x_1+2x_2 \Rightarrow \begin{array}{l}\max y_1+y_2\\ y_1-y_2=3x_1+2x_2\\ y_1,y_2\geq 0\end{array}$$

$$\xrightarrow{II)\,y=|3x_1+2x_2|} \max y \quad y\leq|3x_1+2x_2| \Rightarrow \begin{array}{l}\max y\\ 3x_1+2x_2\geq y\\ 3x_1+2x_2\leq -y\end{array}$$

در حالت **II** فضای حل گسسته است و مسأله به فرم خطی نیست و گزینه ۳ مدنظر طراح بوده است.

۷. گزینه ۴ صحیح است.

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & z=\min\{20,|3x_1-3x_2+4x_3|,|x_1+x_2-2x_3|\}\\ & Ax\leq b\\ & x\geq 0\end{array}$$

با تعریف $y=\min\{20,|3x_1-3x_2+4x_3|,|x_1+x_2-2x_3|\}$، داریم:

$$\Rightarrow \begin{array}{ll}\text{Max} & z=y\\ & y\leq 20\\ & y\leq|3x_1-3x_2+4x_3|\\ & y\leq|x_1+x_2-2x_3|\\ & Ax\leq b\\ & x\geq 0\end{array}$$

با توجه به اینکه محدودیت‌هایی به فرم $|f|\geq y$ وجود دارد، مسأله قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای صحیح می‌باشد.

۸. گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{Min}\ \{\text{Max}(|3x_1-2x_2+4x_3|,|x_1+x_2+2x_3|)\} \Rightarrow \begin{array}{l}\text{Min}\ \{y\}\\ |3x_1-2x_2+4x_3|\leq y\\ |x_1+x_2+2x_3|\leq y\end{array}$$

۹. گزینه ۳ صحیح است.

$$\text{Min } z=\underset{i=1,\dots,m}{\text{Max}}\left(\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right|\right) \Rightarrow \begin{cases}\text{Min } z=x_0\\ x_0\geq\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-b_i\right| \quad i=1,\dots,m\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Min } z = x_0 \\ \sum a_{ij}x_j - b_i \le x_0 \\ \sum a_{ij}x_j - b_i \ge -x_0 \quad i = 1,\dots,m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Min } z = x_0 \\ x_0 - \sum a_{ij}x_j \ge -b_i \\ x_0 + \sum a_{ij}x_j \ge b_i \quad i = 1,\dots,m \end{cases}$$

۲- ناحیه شدنی و انواع محدودیتها

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \text{ یا } \min \ z = cx$$
$$Ax \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b$$
$$x \ge 0$$

۱- محدودیتهای کارکردی: $Ax \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} b$

۲- محدودیتهای غیرکارکردی: $x \ge 0$

۳- محدودیت زائد (وابسته)

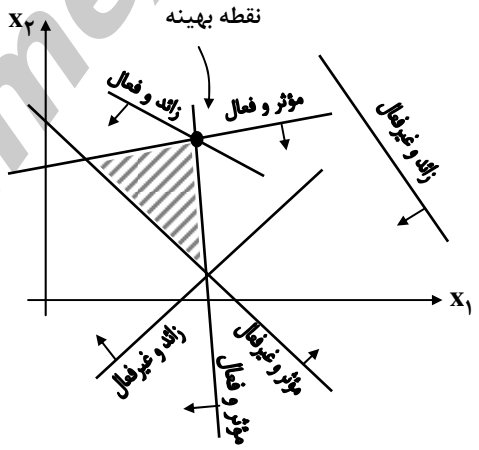
محدودیتی که وجود یا عدم وجود آن تغییری در منطقه موجه ایجاد نمی‌کند.

۴- محدودیت مؤثر

محدودیتی که در ایجاد منطقهٔ موجه مؤثر است.

۵- محدودیت فعال یا الزام‌آور در نقطه بهینه

محدودیتی که نقطه بهینه در آن بصورت تساوی صدق می‌کند.



نکته: با فرض اینکه سمت راست محدودیتها مثبت است،

- ✓ اگر مبدأ مختصات در محدودیت صدق کند، محدودیت بصورت کوچکتر یا مساوی است.
- ✓ اگر مبدأ مختصات در محدودیت صدق نکند، محدودیت بصورت بزرگتر یا مساوی است.

۱۰. گزینه ۱ صحیح است.

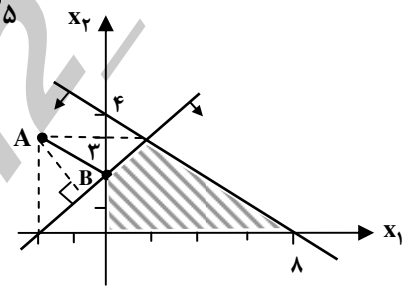
گزینه ۲، یک مکعب را نشان می‌دهد و غلط است. شکل دو محدودیت کارکردی را نشان می‌دهد در نتیجه گزینه ۳ و ۴ غلط هستند.

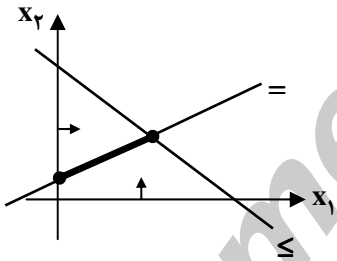
۱۱. گزینه ۲ صحیح است.

با فرض اینکه سمت راست محدودیت‌ها مثبت هستند، محدودیتی که در نقطه C محور $x_۲$ را قطع می‌کند باید بصورت بزرگتر یا مساوی باشد، زیرا شامل مبدأ مختصات نیست و به شکل $x_۲ \geq$ است. از آنجا که محدودیت AB شامل مبدأ مختصات می‌شود، محدودیتی کوچکتر یا مساوی و به صورت $x_۱ + x_۲ \leq$ است، محدودیت گذرنده از مبدأ مختصات به شکل $x_۱ - x_۲ \geq ۰$ است.

۱۲. گزینه ۱ صحیح است.

$$A(-۲,۳), B(۰,۲) \Rightarrow |AB| = \sqrt{(۳-۲)^۲ + (-۲-۰)^۲} = \sqrt{۵}$$



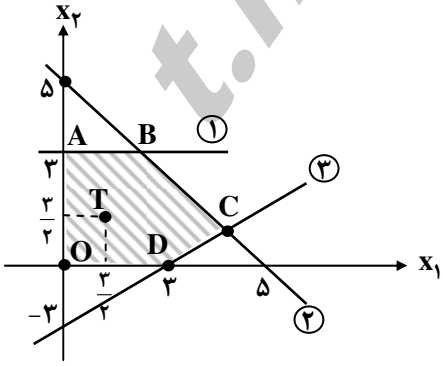


۱۳. گزینه ۴ صحیح است.

در حالتی که مسأله دارای یک محدودیت $\leq$ و یک محدودیت تساوی و $x_i \geq ۰$ است ناحیه شدنی می‌تواند بصورت یک پاره‌خط باشد.

۱۴. گزینه ۳ صحیح است.

$$|TO| = \sqrt{(\frac{۳}{۲})^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲} = ۲.۱۲$$



$|TA| = ۲.۱۲$

$|TB| = ۱.۵۸$

$|TC| = ۲.۵۵$

$|TD| = ۲.۱۲$

شعاع دایره محیط بر ناحیه شدنی $= \max\{۲.۱۲, ۱.۵۸, ۲.۵۵, ۲.۱۲\} = ۲.۵۵$

۳- حل مسأله

۱- به روش ترسیمی (دومتغیره)

روش اول ـ بررسی نقاط گوشه‌ای شدنی

یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد را در نظر بگیرید، اگر یک حل بهینه موجود باشد، یک نقطه رأسی بهینه نیز وجود دارد.

روش دوم ـ حرکت تابع هدف روی ناحیه شدنی

در یک مسأله:

Max : با حرکت در جهت بردار **c**

Min : با حرکت در جهت بردار **−c**

تا حد ممکن می‌توان مقدار بهینه تابع هدف و جواب بهینه را (در صورت وجود) به دست آورد.

روش سوم ـ رسم بردارهای عمود بر محدودیتهای گذرنده از نقاط گوشه‌ای شدنی به سمت خارج ناحیه شدنی: نقطه بهینه در یک مسأله **Max (Min)** نقطه‌ای است که بردار **c (-c)** در مخروط حاصل قرار گیرد.

شرط لازم و کافی بهینه بودن گوشه x^*:

در نقطه رأسی بهینه x^* جهتی که بتوان در امتداد آن حرکت کرد و تابع هدف را در عین شدنی بودن (همزمان با هر یک از عمودهای وارد بر محدودیتها زاویه ≥ ۹۰ بسازد) بهبود بخشید (زاویه حاده با **c** (**Max**سازی) یا **−c** (**Min**سازی) بسازد) وجود ندارد.

۲- حل مسأله با بیش از دو متغیر

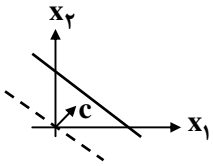
گاهی اوقات مسأله با بیش از دو متغیر را می‌توان به سادگی حل کرد، به طور مثال زمانی که متغیر نامقیدی در یک قید تساوی داشته باشیم می‌توان آن متغیر را از محدودیت تساوی پیدا کرده و با حذف یک متغیر و یک محدودیت، اندازه مسأله را کاهش داد.

همچنین گاهی اوقات مسأله دارای فرم خاصی است که می‌توان با منطقی ساده جواب بهینه آن را بدست آورد، مانند مسأله کوله‌پشتی که تنها یک محدودیت دارد.

نکته: بعضی از حالاتی که با تغییر تابع هدف **Max** به **Min** جواب بهینه مسأله تغییر نمی‌کند عبارتند از:

۱) ناحیه شدنی یک نقطه باشد.

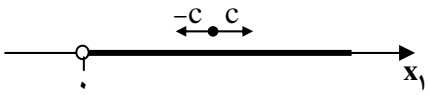
۲) ناحیه شدنی ممکن است یک خط، نیم‌خط، پاره‌خط و یا صفحه باشد.



۳) $c = ۰$، تنها حالتی است که نقطه درونی بهینه می‌شود.

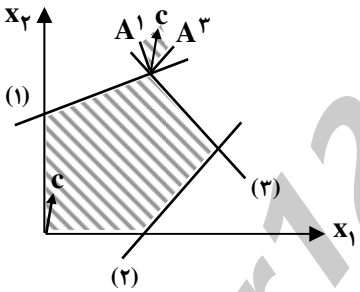
۱۵. گزینه ۲ صحیح است.

تنها محدودیت مسأله $x_1 > 0$ است و بدیهی است که مسأله شدنی می‌باشد، اما این مسأله جواب بهینه ندارد در حالی که به هر مقدار که بخواهیم می‌توانیم x_1 را به مبدأ نزدیک کنیم.



۱۶. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنید ناحیه شدنی مسأله به صورت زیر است:



c در مخروط حاصل از A^1 و A^3 قرار گرفته است، در مثال فوق بردار **c** با A^1 و A^3 زاویه حاده ساخته و ضرب داخلی آنها مثبت خواهد بود:

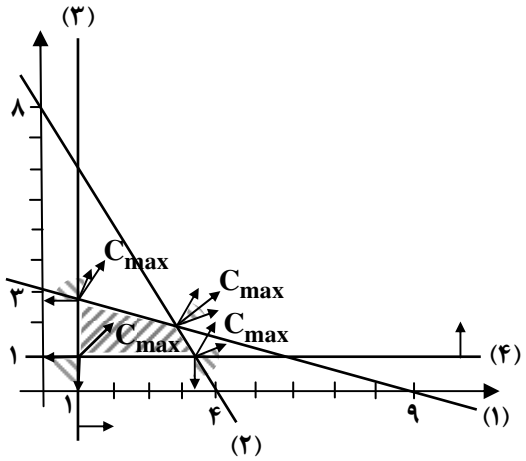
$$cA^1 > 0,\ cA^3 > 0$$

البته ممکن است **c** زاویه منفرجه با عمودی داشته باشد ولی منظور طراح ناحیه شدنی بالا بوده است.

۱۷. گزینه ۱ صحیح است.

مسأله را به روش ترسیمی آن هم به روش سوم حل می‌کنیم:

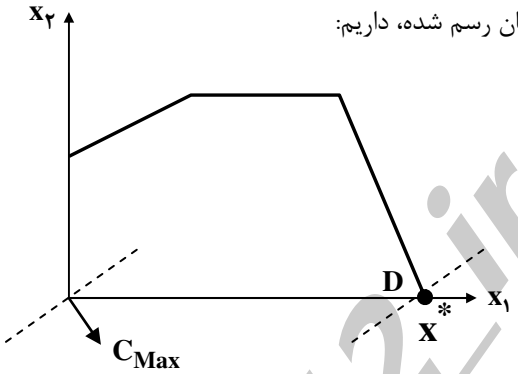
$$\begin{aligned} \text{Max}\ \ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ \ x_1 + 3x_2 &\le 9 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \quad (2) \\ x_1 &\ge 1 \quad (3) \\ x_2 &\ge 1 \quad (4) \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



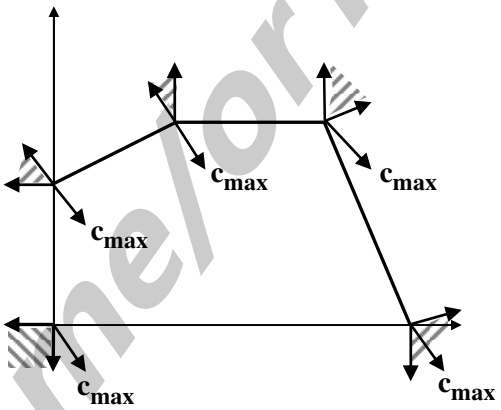
بدیهی است در نقطه بهینه، گرادیان تابع هدف در مخروط حاصل از محدودیتهای اول و دوم فعال گرفته است.

☺ ۱۸. گزینه ۴ صحیح است.

راه اول: با توجه به گرادیان رسم شده، داریم:



راه دوم: عمود بر محدودیتها را به سمت خارج ناحیه شدنی رسم کرده و وجود بردار **c** را در مخروط حاصل از آنها بررسی می‌کنیم:



😐 ۱۹. گزینه ۱ صحیح است.

از آنجا که متغیر x_1 نامقید است و در یک قید تساوی حضور دارد، می‌توان این متغیر را از قید تساوی بر حسب سایر متغیرها بدست آورد و با جایگذاری در سایر محدودیت‌ها و تابع هدف، این سیستم تقلیل یافته را با یک معادله کمتر و یک متغیر کمتر حل کرد، بنابراین:

$$\text{Max } Z = x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2$$
$$x_1 \quad - x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + x_3$$
$$x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 1 + 4x_2 + 2x_3$$
$$\text{s.t.} \quad 2 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}x_3$$
$$x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0$$

در مسأله جدید با میل کردن x_2, x_3 به بینهایت محدودیت برآورده شده و تابع هدف به بینهایت میل می‌کند.

۲۰. گزینه ۲ صحیح است.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 2 \\ -x_2 + x_3 \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 4 \\ -2x_2 + 2x_3 \le 4 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 8$$

بنابراین حداکثر مقدار تابع هدف برابر ۸ است، با توجه به وجود نقطهٔ شدنی $(2,0,2)$ مقدار تابع هدف بهینه برابر ۸ است.

۲۱. هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

مقدار تابع هدف در نقطه گوشه‌ای شدنی $x^{\cdot} = (2,0,4,0,2,0)$ برابر ۱۲ است بنابراین تمام گزینه‌ها غلط است.

۲۲. گزینه ۲ صحیح است.

برای اینکه حداکثر مقدار را در محدودیت اول به x_1 دهیم، باید حداقل مقدار ممکن به x_2 و x_3 اختصاص داده شود، حداقل مقداری که x_3 می‌تواند اختیار کند برابر ۱۰ است، با توجه به محدودیت دوم، $x_2 \ge 90$ بوده و حداقل مقداری که x_2 می‌تواند اختیار کند برابر ۹۰ است، در نتیجه با توجه به محدودیت اول، $x_1 \le 80$ بوده و $x_1^* = 80$ خواهد بود، بنابراین:

$$x_1^* = 80,\ x_2^* = 90,\ x_3^* = 10 \Rightarrow z^* = 7800$$

۲۳. گزینه ۱ صحیح است.

با حذف محدودیت سوم، می‌توان به x_3 مقدار صفر، و با توجه به محدودیت دوم به x_2 مقدار ۱۰۰ اختصاص دهیم. در نهایت با توجه به محدودیت اول $x_1^* = 100$ خواهد بود.

$$z^* = 50(100) + 40(100) + 20(0) = 9000$$

۲۴. گزینه ۲ صحیح است.

در چنین مسأله‌ای توجه کنید که چون همه ضرایب مثبت‌اند (در تابع هدف) پس بهتر است متغیرهایی در کران بالا، یعنی مقدار ۲۰، قرار گیرند که ضرایب بزرگتری دارند. ابتدا باید به تمام متغیرها مقدار ۵ بدهیم بعد از انجام این کار ۶۰ واحد منبع باقیمانده را به صورت زیر تقسیم می‌کنیم:

$$x_1^* = 5, x_2^* = 20, x_3^* = 5, x_4^* = 5, x_5^* = 20, x_6^* = 5, x_7^* = 20, x_8^* = 20 \Rightarrow z^* = 570$$

۲۵. گزینه ۳ صحیح است.

مسأله شدنی بوده و از آنجا که ناحیه شدنی محدود است جواب بهینه نامتناهی نخواهیم داشت. البته با توجه به گزینه‌ها این مطلب بدیهی است. با توجه به اینکه جواب بهینه متناهی است از $\min\left\{\frac{c_j}{a_{ij}}\right\}$ شروع به مقداردهی می‌کنیم،

$$\min\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۳},\frac{۴}{۲},\frac{-۵}{۲},\frac{-۶}{۱۰}\right\}=\frac{-۵}{۲}$$

توجه داشته باشید حداکثر مقداری که x_j می‌تواند اختیار کند ۶ است، در نتیجه،

$$x_۵^*=۶\ ,\ \ x_۶^*=۶$$

بعد از مقداردهی به $x_۶, x_۵$، ۲۸ واحد از ۱۰۰ واحد سمت راست محدودیت باقی می‌ماند، کمترین نسبت باقیمانده $\frac{۲}{۵}$ است و از آنجا که $x_۲$ ضریب مثبتی در تابع هدف دارد و تابع هدف مینیمم‌سازی است، کمترین مقدار ممکن را به آن می‌دهیم:

$$x_۲^*=\frac{۲۸}{۵}\Rightarrow z^*\cong -۵۴.۸$$

۲۶. گزینه ۱ صحیح است.

با توجه به اینکه جواب بهینه مسأله قطعاً متناهی است، از $\max\left\{\frac{c_j}{a_{۱j}}\right\}$ شروع به مقداردهی می‌کنیم:

$$\max\left\{\frac{۲}{\frac{۱}{۲}},\frac{۴}{\frac{۱}{۲}},\frac{۸}{۲},\frac{۶}{۲},\frac{۱۰}{۸}\right\}\ \Rightarrow x_۲=۱۰$$

۵ واحد از ۳۱ واحد منبع مصرف می‌شود حال باید به $x_۱$ یا $x_۳$ مقدار دهیم ولی با توجه به منبع باقیمانده هر دو می‌توانند مقدار ۱۰ بگیرند، این مقدار را به $x_۱$ و $x_۳$ اختصاص می‌دهیم:

$$x_۱=۱۰\ ,\ x_۳=۱۰$$

یک واحد باقیمانده منبع را با توجه به $۲x_۴\le ۱$ به صورت $x_۴=\frac{۱}{۲}$ مصرف می‌کنیم، در نتیجه:

$$z^*=۲(۱۰)+۴(۱۰)+۸(۱۰)+۶(\frac{۱}{۲})+۱۰(۰)=۱۴۳$$

۲۷. گزینه ۲ صحیح است.

$$\max\left\{\frac{۳}{۹},\frac{-۴}{۵},\frac{-۵}{۴},\frac{۶}{۳}\right\}=۲\Rightarrow x_۴^*=۹۰\ ,\ \ z^*=۵۴۰$$

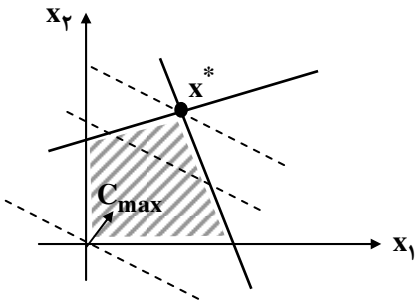
۴- حالات خاص حل هندسی

۱- جواب بهینه منحصر بفرد

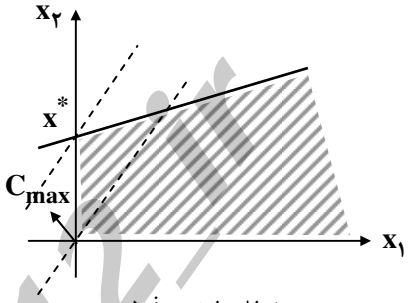
تعداد نقاط بهینه =۱

تعداد نقاط رأسی بهینه =۱

ناحیه شدنی: کراندار یا بی‌کران



بهینه منحصربفرد
ناحیه شدنی کراندار

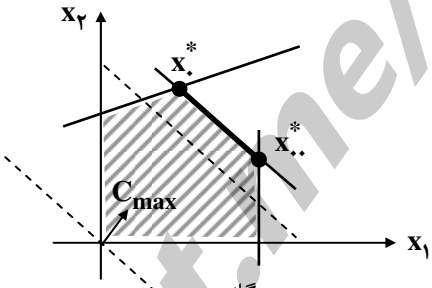


بهینه منحصربفرد
ناحیه شدنی بی‌کران

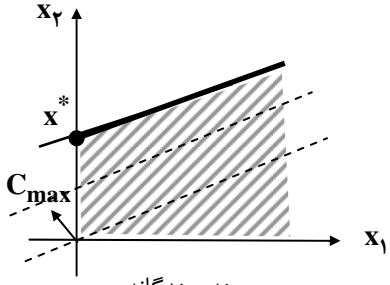
۲- جواب بهینه چندگانه

تعداد نقاط بهینه = بی‌نهایت

ناحیه شدنی: کراندار یا بی‌کران



بهینه چندگانه
ناحیه شدنی کراندار
تعداد نقاط رأسی بهینه = ۲



بهینه چندگانه
ناحیه شدنی بی‌کران
تعداد نقاط رأسی بهینه = ۱

شرط لازم در فضای دو بعدی: موازی بودن تابع هدف با یکی از محدودیتها

جواب بهینه چندگانه $\not\Rightarrow$ موازی بودن تابع هدف با یکی از محدودیتها

جواب بهینه چندگانه $\not\Rightarrow$ موازی بودن تابع هدف با محدودیتهای فعال

جواب بهینه چندگانه $\not\Rightarrow$ موازی بودن تابع هدف با محدودیتهای فعال غیر زائد

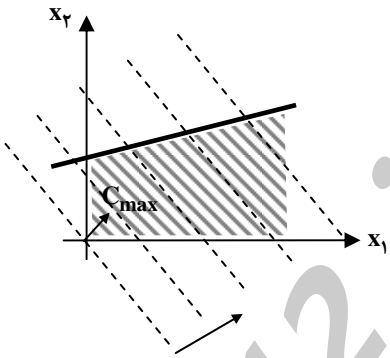
تابع هدف با یکی از محدودیتها موازی است $\not\Rightarrow$ جواب بهینه چندگانه

۳- مسأله بی‌کران

تعداد نقاط بهینه = صفر

شرط لازم: بی‌کران بودن ناحیه شدنی

علت: فرموله شدن غلط مسأله



مقدار تابع هدف بطور نامتناهی افزایش می‌یابد

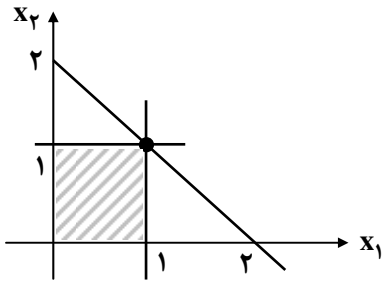
۴- ناحیه شدنی تهی (مسأله نشدنی، ناسازگار)

ناحیه شدنی محدودیتها اشتراکی با یکدیگر ندارد.

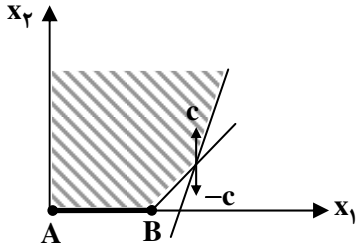
۲۸. هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

$$\begin{aligned} \text{Min } & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_4 = 1 \\ & x_2 + x_5 = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \text{Min } & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq 1 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

با توجه به شکل،



و $C_{min} = (1,1)$، جواب بهینه مبدأ مختصات بوده و $z^* = 0$ است، به گزینه‌ها که دقت کنیم درمی‌یابیم منظور طراح **Max**سازی بوده و گزینه ۱ باید انتخاب شود!

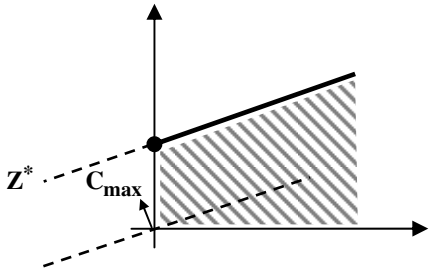


۲۹. گزینه ۲ صحیح است.

با حرکت روی ناحیه شدنی در جهت $-\mathbf{c}$، پاره‌خط **AB** به‌عنوان جواب بهینه چندگانه مسأله بدست می‌آید.

۳۰. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به حالات خاص روش هندسی (جواب بهینه چندگانه) ممکن است جواب بهینه یگانه یا چندگانه داشته باشیم.

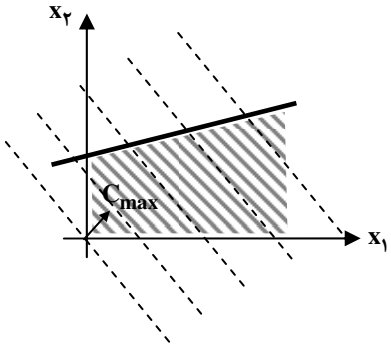


۳۱. گزینه ۳ صحیح است.

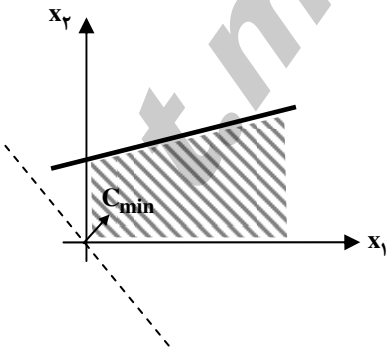
در حالتی که شعاع بهینه داریم مقدار بهینه تابع هدف، مقداری محدود است ولی x^* مقادیر نامحدود نیز دارد.

۳۲. گزینه ۴ صحیح است.

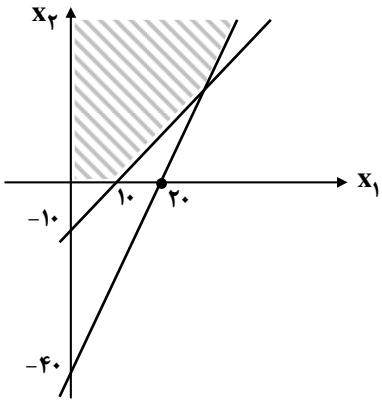
اگر فضای موجه یک مسأله برنامه‌ریزی خطی نامحدود باشد، ممکن است حالت خاص جواب بهینه نامتناهی داشته باشیم. در واقع بی‌کران بودن ناحیه شدنی تنها شرط لازم برای نامتناهی بودن مقدار تابع هدف است و کافی نیست. به اشکال زیر توجه کنید:



ناحیه شدنی بی‌کران
مقدار بهینه تابع هدف نامتناهی



ناحیه شدنی بی‌کران
مقدار بهینه تابع هدف متناهی



۳۳. گزینه ۳ صحیح است.

فضای جواب بی‌کران بوده و مسأله نیز بی‌کران است، دقت داشته باشید در این حالت جواب بهینه‌ای نداریم.

۳۴. گزینه ۱ صحیح است.

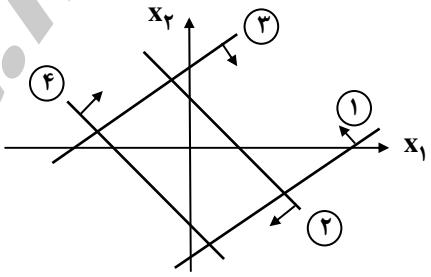
از آنجا که $0 \le \lambda \le 1$ است، اگر مسئله ۱ شدنی باشد بهترین جواب برای آن $\lambda = 1$ و بدترین جواب $\lambda = 0$ می‌باشد اگر محدودیت $Ax \le b$ برقرار باشد پس λ می‌تواند مقدار یک بگیرد و جواب بهینه مسئله اول یک می‌شود، در این حالت در مورد جواب مسئله ۲ هیچ نظری نمی‌توان داد و فقط می‌توان گفت که مسئله ۲ شدنی است. پس گزینه ۳و۴ حذف می‌شوند.

حال اگر جواب بهینه مسئله ۱ برابر صفر باشد، حتماً قید $Ax \le b$ برقرار نبوده است، حال بدیهی است مسئله ۲ نشدنی است.

۳۵. گزینه ۴ صحیح است.

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$
$$sx_1 + tx_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ناحیه شدنی مسأله، یکی از چهار حالت زیر است،



در حالت ۱ و ۳، با توجه به گرادیان محدودیت، حاصلضرب st منفی است و ناحیه شدنی نامتناهی بوده و مسأله بی‌کران است بنابراین گزینه ۱ و ۲ نادرست است، تفاوت گزینه ۳ و ۴ تنها در $s,t = 0$ است، اگر

$s = t = ۰$ را در نظر بگیریم $۰ \le ۱$ حاصل شده که همواره برقرار است، ناحیه شدنی مسأله ربع اول بوده و مسأله بی‌کران است، در نتیجه گزینه ۴ صحیح است.

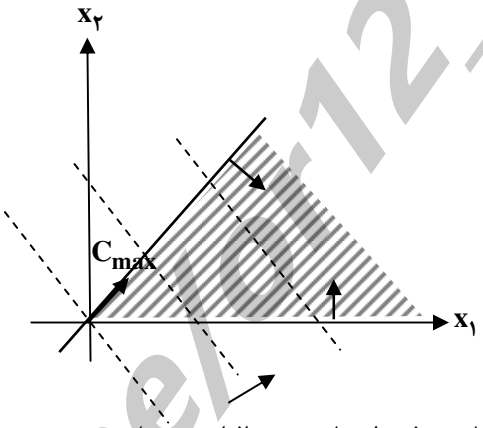
۳۶. گزینه ۳ صحیح است.

گزینه ۱ نادرست است، زیرا به ازای $p = -۱$ و $k = ۰$، محدودیت $x_۲ \le -۱$ حاصل شده و ناحیه شدنی تهی خواهد بود.

گزینه ۲ نادرست است، زیرا به ازای $p = -۱$ و $k = ۱$، محدودیت $x_۱ + x_۲ \le -۱$ حاصل شده و ناحیه شدنی تهی خواهد بود.

گزینه ۴ نادرست است، زیرا به ازای $p = ۱$ و $k = ۱$، محدودیت $x_۱ + x_۲ \le ۱$ حاصل شده و ناحیه شدنی در ربع اول کراندار است.

گزینه ۳ صحیح است، زیرا به ازای $p = ۰$ و $k = -۱$، داریم:



تابع هدف بطور نامحدودی افزایش می‌یابد.

۵- فضای احتیاج

فضای احتیاج و محدودیتهای تساوی

دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\ge ۰ \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\sum_{j=۱}^{n} a_j x_j = b \\ &x_j \ge ۰ \,,\; j = ۱,\dots,n \end{aligned}$$

که در آن a_j، ستون jام ماتریس A است.

مسأله فوق شدنی است اگر و فقط اگر بردار $\mathbf{b}$ در مخروط حاصل از ترکیب خطی نامنفی بردارهای $\mathbf{a_j}$ قرار گیرد. اگر قید $\mathbf{x_j \geq 0}$ برداشته شود، مسأله شدنی است اگر و فقط اگر بردار $\mathbf{b}$ در ترکیب خطی بردارهای $\mathbf{a_j}$ قرار گیرد.

فضای احتیاج و محدودیتهای نامساوی

دستگاه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{matrix} \mathbf{Ax \leq b} \\ \mathbf{x \geq 0} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_j x_j \leq b} \\ \mathbf{x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,n} \end{matrix}$$

مسأله فوق شدنی است اگر و فقط اگر بردارهای کوچکتر یا مساوی بردار $\mathbf{b}$ در مخروط حاصل از ترکیب خطی نامنفی بردارهای $\mathbf{a_j}$ قرار گیرد. همچنین اگر دستگاه بصورت زیر باشد:

$$\begin{matrix} \mathbf{Ax \geq b} \\ \mathbf{x \geq 0} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_j x_j \geq b} \\ \mathbf{x_j \geq 0,\ j = 1,\dots,n} \end{matrix}$$

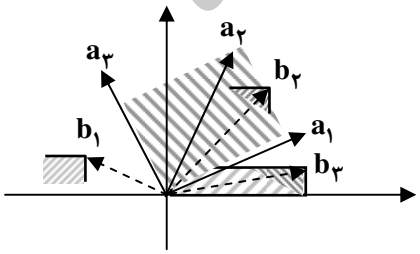
مسأله فوق شدنی است اگر و فقط اگر بردارهای بزرگتر یا مساوی بردار b در مخروط حاصل از ترکیب خطی نامنفی بردارهای $\mathbf{a_j}$ قرار گیرد.

۳۷. گزینه ۲ صحیح است.

می‌دانیم در دستگاه معادلات خطی محدودیت‌ها به فرم تساوی هستند، در نتیجه به علت اینکه بردار $\mathbf{b}$ در مخروط حاصل از $\mathbf{a_j}$ها در $\mathbf{P_1}$ قرار نمی‌گیرد، $\mathbf{P_1}$ نشدنی و به علت اینکه بردار $\mathbf{b}$ در مخروط حاصل از $\mathbf{a_j}$ها در $\mathbf{P_2}$ قرار گرفته، $\mathbf{P_2}$ شدنی است.

۳۸. گزینه ۲ صحیح است.

با توجه به $\mathbf{Ax \leq b,\ x \geq 0}$ و شکل زیر، دستگاه به ازای $\mathbf{b = b_2}$، $\mathbf{b = b_3}$، شدنی است.



۶- مدل‌سازی

پیشنهاد می‌شود قبل از حل تستهای مدل‌سازی، مثال‌های ۲۱، **۲۲**، ۲۴، **۳۲** و **۳۳** از کتاب تحقیق در عملیات ۱ به عنوان حداقلی از مثال‌های مدل‌سازی مطالعه شود.

۳۹. گزینه ۲ صحیح است.

برای $i = ۱,۲,۳$ و $j = ۱,۲,۳,۴$ داریم:

M_i : ظرفیت ماشین ساعت کار کارگاه iام

N_i : ظرفیت نفر ساعت کار کارگاه iام

k_{ij} : میزان ماشین ساعت کار برای تولید صندلی نوع j در کارگاه iام

p_{ij} : میزان نفر ساعت کار برای تولید صندلی نوع j در کارگاه iام

D_j : تقاضای ماهیانه صندلی نوع j

C_{ij} : سود حاصل از فروش هر صندلی نوع j که در کارگاه iام تولید می‌شود

x_{ij} : تعداد صندلی نوع j که در کارگاه iام تولید می‌شود

S_{ij} : ماشین ساعت ظرفیت استفاده نشده در کارگاه i

سیاست‌های شرکت (تابع هدف و محدودیتها):

- ✓ جمع تولید ماهانه صندلی نوع j در سه کارگاه بیشتر از D_j نشود.
- ✓ نسبت ماشین ساعت ظرفیت استفاده نشده در هر کارگاه به کل ظرفیت ماشین ساعت آن کارگاه برای هر سه کارگاه یکسان باشد.
- ✓ حداکثرسازی سود

از آنجا که هدف حداکثرکردن سود به واسطه تعیین تعداد بهینه تولید است لذا باید x_{ij} در تابع هدف نقش داشته باشد، با توجه به $x_{ij} = \min\left\{\frac{M_i}{k_{ij}}, \frac{N_i}{p_{ij}}\right\}$، مسأله بصورت زیر فرموله می‌شود:

$$\text{Max } z = \sum_{i=۱}^{۳}\sum_{j=۱}^{۴} \text{Min}\left\{\frac{M_i}{k_{ij}}, \frac{N_i}{p_{ij}}\right\} c_{ij}$$

$$\sum_{i=۱}^{۳} x_{ij} \le D_j \qquad j = ۱,۲,۳,۴$$

$$\frac{S_۱}{M_۱} = \frac{S_۲}{M_۲} = \frac{S_۳}{M_۳}$$

۴۰. گزینه ۱ صحیح است.

میزان ماشین ساعت کار استفاده شده به علاوه ماشین ساعت ظرفیت استفاده نشده باید برابر کل ظرفیت ماشین ساعت کار کارگاه $\mathbf{i}$ام باشد.

۴۱. گزینه ۳ صحیح است.

از آنجا که می‌خواهیم جمع تولید ماهانه صندلی نوع $\mathbf{j}$ در سه کارگاه بیشتر از $\mathbf{D_j}$ نشود پس گزینه ۳ را انتخاب می‌کنیم.

۴۲. گزینه ۳ صحیح است.

از آنجا که می‌خواهیم نسبت ماشین ساعت ظرفیت استفاده نشده در هر کارگاه به کل ظرفیت ماشین ساعت آن کارگاه برای هر سه کارگاه یکسان باشد پس مثلاً برای کارگاه ۱ و ۲ داریم:

$$\frac{S_1}{M_1}=\frac{S_2}{M_2}=\frac{S_3}{M_3}\Rightarrow\frac{S_1}{M_1}=\frac{S_2}{M_2}\Rightarrow S_1M_2-S_2M_1=0$$

۴۳. گزینه ۳ صحیح است.

راه حل اول: اگر تمام زمان را صرف تولید محصول ۲ کنیم (یعنی $x_1=x_3=0$) باید قادر به تولید حداکثر ۵۰۰ واحد محصول باشیم (یعنی $x_2\le 500$) با توجه به همین مطلب گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ غلط هستند و نیازی به ادامه حل تست نیست، زیرا تنها گزینه‌ای که به ازای $x_1=x_3=0$ منجر به $x_2\le 500$ می‌شود، گزینه ۳ است.

ولی توجه کنید از آنجا که زمان تولید محصول ۱، نصف زمان تولید محصول ۲ است پس اگر تمام زمان را صرف تولید محصول ۱ کنیم باید ۱۰۰۰ واحد محصول تولید کنیم. همچنین از آنجا که زمان تولید محصول ۱، $\frac{2}{3}$ زمان تولید محصول ۳ است اگر تمام زمان تولید را به محصول ۳ اختصاص دهیم باید $\frac{2}{3}\times 1000$ واحد از محصول ۳ تولید کنیم. گزینه ۳ را برای حالتی که تمام زمان را برای محصول ۱ و ۳ اختصاص دهیم، بررسی می‌کنیم:

محصول ۳ : $x_1=x_2=0\Rightarrow 3x_3\le 2000\Rightarrow x_3\le\frac{2000}{3}$ (صحیح است)

محصول ۱ : $x_2=x_3=0\Rightarrow 2x_1\le 2000\Rightarrow x_1\le 1000$ (صحیح است)

راه حل دوم:

$$t_1=\frac{1}{2}t_2$$

$$t_1=\frac{2}{3}t_3$$

فرض کنید $t_2 = t$، داریم:

$$t_1 = \frac{1}{2}t \quad , \quad t_2 = t \quad , \quad t_3 = \frac{3}{4}t$$

بنابراین محدودیت بصورت زیر است:

$$\frac{t}{2}x_1 + tx_2 + \frac{3t}{4}x_3 \le 500t \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{3}{4}x_3 \le 500 \Rightarrow 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 2000$$

۴۴. گزینه ۲ صحیح است.

اگر x_i را مقدار استخراج نفت از میدان شماره i در نظر بگیریم با توجه به اینکه حداقل خوراک پالایشگاه $60000\frac{stb}{d}$ می‌باشد، داریم:

$$x_1 + x_2 \ge 60000$$

حداکثر نسبت گاز به نفت قابل عبور از لوله‌ها $2000\frac{scf}{stb}$ است، بنابراین:

$$1000x_1 + 4000x_2 \le 2000(x_1 + x_2)$$

۴۵. گزینه ۲ صحیح است.

هر صندوقدار در ازای ۵ روز کار متوالی ۲ روز به مرخصی می‌رود بنابراین اگر صندوقداری از روز یکشنبه یا دوشنبه ۵ روز کاری متوالی را آغاز کند در روز شنبه مرخصی خواهد بود، بنابراین در محدودیت تعداد افرادی که در روز شنبه کار می‌کنند x_3, x_2 نخواهند بود،

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 15$$

۴۶. گزینه ۱ صحیح است.

گزینه ۳ مربوط به محدودیت شیفت ۱ است، بنابراین باید شامل y_1 و x_1 باشد اما از آنجا که فاقد y_1 است حذف می‌شود، محدودیت شیفت ۱ عبارتست از:

$$x_1 + x_4 + y_1 + y_3 + y_4 \ge 12$$

گزینه ۲ مربوط به محدودیت شیفت ۲ است، بنابراین نمی‌تواند از افرادی که در شیفت ۳ به مدت ۱۲ ساعت کار می‌کنند استفاده کند (x_3) و حذف می‌شود، محدودیت شیفت ۲ عبارتست از:

$$x_1 + x_2 + y_4 + y_1 + y_2 \ge 8$$

گزینه ۱ مربوط به محدودیت شیفت ۳ است و صحیح است:

$$x_3 + x_2 + y_1 + y_2 + y_3 \ge 6$$

گزینه ۴ مربوط به محدودیت شیفت ۴ است و مانند گزینه ۲ نمی‌تواند از افرادی که در شیفت ۲ به مدت ۱۲ ساعت کار می‌کنند استفاده کند (x_2) و حذف می‌شود، محدودیت شیفت ۴ عبارتست از:

$$x_3 + x_4 + y_2 + y_3 + y_4 \ge 15$$

۴۷. گزینه ۳ صحیح است.

با توجه به مسأله مونتاژ، داریم:

$$\text{Max } z = \min\{x_A, x_B\}$$

۴۸. گزینه ۴ صحیح است.

۴۹. گزینه ۴ صحیح است.

جهت محصول مونتاژ شده به ۲ قطعه **A**، یک قطعه **B**، ۳ قطعه **C** نیاز داریم، با توجه به مسأله مونتاژ تابع هدف مدل عبارت است از:

$$\max z = \min\left\{\frac{x_A}{۲}, x_B, \frac{x_C}{۳}\right\}$$

۵۰. گزینه ۳ صحیح است.

$x_{ij} = i$ میزان تولید تکه **j** در دپارتمان

دو محدودیت مربوط به ظرفیت تولید داریم:

$$\frac{x_{۱۱}}{۱۰} + \frac{x_{۱۲}}{۱۵} \le ۱۵۰$$

$$\frac{x_{۲۱}}{۱۵} + \frac{x_{۲۲}}{۱۳} \le ۳۰۰$$

همچنین با توجه به مسأله مونتاژ تابع هدف به صورت $\max \ z = \min\{x_{۱۱} + x_{۲۱}, x_{۱۲} + x_{۲۲}\}$ است، در نتیجه:

$$\max \ z = \min\{x_{۱۱} + x_{۲۱}, x_{۱۲} + x_{۲۲}\}$$

$$\text{st.} \quad \frac{x_{۱۱}}{۱۰} + \frac{x_{۱۲}}{۱۵} \le ۱۵۰, \quad \frac{x_{۲۱}}{۱۵} + \frac{x_{۲۲}}{۱۳} \le ۳۰۰$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\max \quad z = y \\ &y \le x_{۱۱} + x_{۲۱} \\ &y \le x_{۱۲} + x_{۲۲} \\ &\frac{x_{۱۱}}{۱۰} + \frac{x_{۱۲}}{۱۵} \le ۱۵۰ \\ &\frac{x_{۲۱}}{۱۵} + \frac{x_{۲۲}}{۱۳} \le ۳۰۰ \\ &x_{ij} \ge ۰, \ i,j = ۱,۲ \end{aligned}$$

۷- بررسی تغییراتی در مسأله و چند نکته خاص

۱- تغییر در بردار سمت راست

در دستگاه:

$$Ax \le b$$

اگر $b_i \to b_i + ۱$، آنگاه ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود، تابع هدف بدتر نمی‌شود.

و در دستگاه:

$$Ax \ge b$$

اگر $b_i \to b_i + ۱$، آنگاه ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود، تابع هدف بهتر نمی‌شود.

۲- اضافه و حذف محدودیت و متغیرها و تغییراتی روی محدودیتها

ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود، تابع هدف بدتر نمی‌شود $\Rightarrow$ حذف محدودیت و اضافه شدن متغیر

ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود، تابع هدف بهتر نمی‌شود $\Rightarrow$ اضافه شدن محدودیت و حذف متغیر

مقدار بهینه تابع هدف	ناحیه شدنی	نوع تغییر	ردیف
بهتر نمی‌شود	بزرگتر نمی‌شود	$Ax \ge b$ $x \ge ۰$ $b_i \to b_i + ۱$	۱
		اضافه شدن محدودیت	۲
		حذف شدن متغیر	۳
بدتر نمی‌شود	کوچکتر نمی‌شود	$Ax \le b$ $x \ge ۰$ $b_i \to b_i + ۱$	۴
		حذف شدن محدودیت	۵
		اضافه شدن متغیر	۶

۳- مقایسه f و g با f + g

فرض کنید مسائل برنامه‌ریزی خطی زیر دارای محدودیتهای یکسان هستند، داریم:

$$\text{Max } (f+g)(x) \le \text{Max } f(x) + \text{Max } g(x)$$
$$\text{Min } (f+g)(x) \ge \text{Min } f(x) + \text{Min } g(x)$$

چند نکته خاص:

۱- کران بالا یا پائین مقدار تابع هدف بهینه

گاهی اوقات متغیرها دارای کران بالا یا پائین بوده و به‌راحتی با توجه به نوع تابع هدف می‌توان کران بالا یا پائین برای مقدار تابع هدف بهینه بدست آورد.

۲- اگر محدودیتهای مسأله کوچکتر یا مساوی بوده و سمت راست محدودیتها نامنفی باشد، مسأله حتماً شدنی است چون مبدأ مختصات در آن صدق می‌کند.

۳- اگر ناحیه شدنی مسأله زیر غیرتهی باشد:

$$\mathbf{Ax \geq b}$$

$$\mathbf{x \geq 0}$$

و ضریب متغیر $\mathbf{x_j}$ در تمام محدودیتها نامنفی باشد، ناحیه شدنی مسأله بی‌کران است.

و اگر ناحیه شدنی مسأله زیر غیرتهی باشد:

$$\mathbf{Ax \leq b}$$

$$\mathbf{x \geq 0}$$

و ضریب متغیر $\mathbf{x_j}$ در تمام محدودیتها نامثبت باشد، ناحیه شدنی مسأله بی‌کران است.

☺ ۵۱. هیچکدام از گزینه‌ها صحیح نیستند.

محدودیت $\mathbf{x \leq 5}$ را در نظر گرفته و یک واحد به سمت راست آن اضافه کنید، خواهیم داشت $\mathbf{x \leq 6}$ حال اگر محدودیت برای فضای جواب زائد باشد همچنان زائد خواهد ماند و فضای جواب تغییری نمی‌کند وگرنه فضای جواب بزرگتر خواهد شد پس در هر صورت فضای جواب کوچکتر نخواهد شد و هر چهار گزینه غلط است و به ضرایب X هم بستگی ندارد. چرا؟ محدودیت $\mathbf{a_i x \leq b_i}$ را در نظر بگیرید، $\mathbf{a_i}$ گرادیان محدودیت است و از آنجا که محدودیت به صورت $\leq$ است، شامل نقاطی خواهد بود که در آن $\mathbf{a_i x}$ کاهشی است و خلاف جهت گرادیان باید حرکت کنیم حال اگر $\mathbf{b_i \to b_i + 1}$ تغییر کند هرگز امکان ندارد ناحیه شدنی کوچکتر شود.

۵۲. گزینه ۴ صحیح است.

فرض کنید $\mathbf{x^*}$ جواب بهینه مسأله ۱ و $\mathbf{x'^*}$ جواب بهینه مسأله ۲ باشد، با توجه به اینکه $\mathbf{E' > E}$ است، نقطه $\mathbf{x^*}$ یک نقطه درون ناحیه شدنی مسأله ۲ خواهد بود. بنابراین همواره می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{z' < z}$ است. اما از آنجا که گفته شده تابع هدف غیرخطی است ممکن است این نقطه درونی بهینه باشد. همچنین اگر $\mathbf{x \geq 0}$ بود و تابع هدف خطی بود می‌توانستیم چنین نتیجه‌ای بگیریم زیرا ممکن بود نقطه بهینه مبدأ مختصات باشد.

۵۳. گزینه ۲ صحیح است.

با اضافه شدن سمت راست محدودیتها، در این مسأله که تمام محدودیتها کوچکتر یا مساوی هستند، ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود، در نتیجه،

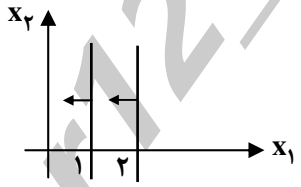
$$z_2 \le z_1$$

خواهد بود. البته اگر تابع هدف مسائل خطی بوده و بهینه متناهی باشند می‌توانستیم $z_2 < z_1$ را انتخاب کنیم زیرا نقطه بهینه p_1 برای p_2 یک نقطه درونی است، اما با توجه به اینکه عنوان شده مسائل برنامه‌ریزی ریاضی، ممکن است تابع هدف غیرخطی بوده و نقطه درونی ناحیه شدنی p_2 که همان نقطه بهینه p_1 است، برای p_2 نیز بهینه باشد.

۵۴. گزینه ۲ صحیح است.

با یک مثال ساده مسأله را بررسی می‌کنیم:

$x_1 \le 2$ (A) $\qquad$ $2x_1 \le 2 \Rightarrow x_1 \le 1$ (B)



با توجه به اینکه مؤثر یا زائد بودن این محدودیت مشخص نیست، تنها می‌توان گفت ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و تابع هدف بهتر نمی‌شود، در نتیجه $z' \ge z$ خواهد بود.

۵۵. گزینه ۳ صحیح است.

مانند تست قبل است ولی چون تابع هدف ماکزیمم‌سازی است، $z_2 \le z_1$ نتیجه خواهد شد.

۵۶. گزینه ۲ صحیح است.

مسأله ۱

$$Z = \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.t.

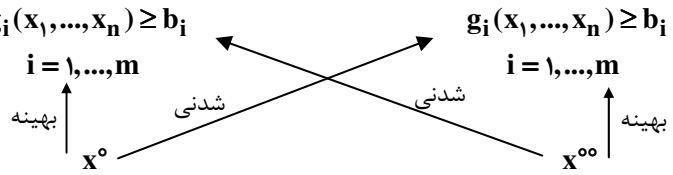
$$g_i(x_1,\dots,x_n) \ge b_i$$
$$i = 1,\dots,m$$

مسأله ۲

$$Z' = \min \sum_{j=1}^{n} c'_j x_j$$

s.t.

$$g_i(x_1,\dots,x_n) \ge b_i$$
$$i = 1,\dots,m$$



توجه دارید که محدودیت‌های هر دو مسأله یکسان هستند $x^\circ, x^{\circ\circ}$ برای هر دو مسأله شدنی هستند. x° جواب بهینه مسأله یک است ولی $x^{\circ\circ}$ تنها یک جواب شدنی برای مسأله یک است. بنابراین:

$$cx^{\circ\circ} \geq cx^\circ \Rightarrow c_1x_1^{\circ\circ} + \dots + c_nx_n^{\circ\circ} \geq c_1x_1^\circ + \dots + c_nx_n^\circ$$

همین‌طور $x^{\circ\circ}$ جواب بهینه مسأله ۲ بوده ولی x° جواب شدنی برای این مسأله است. بنابراین:

$$c'x^\circ \geq c'x^{\circ\circ} \Rightarrow c_1'x_1^\circ + \dots + c_n'x_n^\circ \geq c'x_1^{\circ\circ} + \dots + c_n'x_n^{\circ\circ}$$

۵۷. گزینه ۳ و ۴ صحیح است.

مانند تست قبل، دو مسأله ۱ و ۲ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مسأله ۱

$$Z = \max \sum_{j=1}^{n} c_j'x_j$$

s.t.

$$g_i(x_1,\dots,x_n) \geq b_i \quad i = 1,\dots,m$$

بهینه x' — شدنی

مسأله ۲

$$Z' = \max \sum_{j=1}^{n} c_j''x_j$$

s.t.

$$g_i(x_1,\dots,x_n) \geq b_i \quad i = 1,\dots,m$$

شدنی — بهینه x''

$$\begin{cases} c'x' \geq c'x'' \\ c''x'' \geq c''x' \end{cases} \Rightarrow c'x' + c''x'' \geq c'x'' + c''x'$$

$$\Rightarrow x'(c'-c'') + x''(c''-c') \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه ۳}: (c'-c'')(x'-x'') \geq 0 \\ \text{گزینه ۴}: (c'-c'')(x''-x') \leq 0 \end{cases}$$

۵۸. گزینه ۱ صحیح است.

$$P_1: \text{Min } c_1x \quad Ax \leq b \quad x \geq 0$$

$$P_2: \text{Min } c_2x \quad Ax \leq b \quad x \geq 0$$

x_1 بهینه — شدنی — x_2 بهینه

در نتیجه،

$$\begin{array}{l} c_1x_1 \le c_1x_2 \\ \underline{c_2x_2 \le c_2x_1} \end{array}$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 \le c_1x_2 + c_2x_1 \Rightarrow c_1(x_1 - x_2) + c_2(x_2 - x_1) \le 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(c_1 - c_2) \le 0$$

☺ ۵۹. گزینه ۲ صحیح است.

حذف محدودیت فضای جواب را کوچکتر نخواهد کرد و تابع هدف هم بدتر نخواهد شد.

☺ ۶۰. گزینه ۱ صحیح است.

با حذف محدودیت ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود.

☺ ۶۱. گزینه ۱ صحیح است.

با حذف هر محدودیت در هر مسأله فضای شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود ولی در مورد بهتر شدن آن نمی‌توان نظری داد.

☺ ۶۲. گزینه ۲ صحیح است.

با حذف یک محدودیت، ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود (تابع هدف **Max** سازی است در نتیجه مقدار تابع هدف کوچکتر نمی‌شود.)

☺ ۶۳. گزینه ۱ صحیح است.

با اضافه شدن متغیر تصمیم، مقدار تابع هدف جدید بدتر نمی‌شود.

😐 ۶۴. گزینه ۴ صحیح است.

از دستگاه ۱ متغیر x_3 حذف و دستگاه ۲ نتیجه شده است، می‌دانیم حذف متغیر جواب بهینه را بهتر نمی‌کند در نتیجه $Z_2 \ge Z_1$ خواهد بود.

😐 ۶۵. گزینه ۱ صحیح است.

به مسألهٔ z متغیر x_{n+1} اضافه شده و مسأله z' بدست آمده است، با اضافه کردن متغیر، ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود و چون مسأله **min** سازی است نتیجه می‌گیریم که $z' \le z$.

☺ ۶۶. گزینه ۲ صحیح است.

با اضافه کردن یک متغیر جدید، ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود، در نتیجه مقدار تابع هدف یک مسأله ماکزیمم‌سازی را کاهش نخواهد داد.

۶۷. گزینه ۲ صحیح است.

اگر یک محدودیت را حذف کنیم ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود. همچنین با اضافه کردن یک متغیر تصمیم جدید، ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود. این دو تغییر هر دو در یک راستا هستند در نتیجه در نهایت ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بدتر نمی‌شود.

۶۸. گزینه ۳ صحیح است.

به محدودیتهای $\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$ کارکردی و به محدودیتهای $\mathbf{x} \ge 0$ غیرکارکردی گویند، با اضافه کردن محدودیت ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و مقدار تابع هدف بهتر نمی‌شود.

۶۹. گزینه ۱ صحیح است.

هرگز با اضافه کردن محدودیتها نمی‌توان منطقه قابل قبول یک مسأله برنامه‌ریزی خطی را افزایش داد.

۷۰. گزینه ۲ صحیح است.

با اضافه کردن یک محدودیت جدید، ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و تابع هدف بهتر نمی‌شود، بنابراین $\mathbf{z}^* \le \mathbf{z}$ خواهد بود.

۷۱. گزینه ۲ صحیح است.

ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و تابع هدف هم بهتر نمی‌شود.

۷۲. گزینه ۱ صحیح است.

هرگاه محدودیت $\ge$ یا $\le$ را به $=$ تبدیل کنیم ناحیه مربوط به آن محدودیت قطعاً کوچکتر خواهد شد ولی در مورد اشتراک محدودیت‌های $\begin{matrix}\mathbf{Ax} \ge \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} \le \mathbf{d}\end{matrix}$ و تبدیل آن به $\begin{matrix}\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{Dx} = \mathbf{d}\end{matrix}$ تنها می‌توان گفت ناحیه شدنی بزرگتر نخواهد شد و تابع هدف بهتر نمی‌شود.

۷۳. گزینه ۱ صحیح است.

به کادر جمع‌بندی مراجعه شود.

۷۴. گزینه ۳ صحیح است.

به کادر جمع‌بندی مراجعه شود.

☺ ۷۵. گزینه ۱ صحیح است.

از آنجا که مسأله Max سازی است پس بهترین حالت ممکن این است که به متغیرهای با ضریب منفی در تابع هدف مقدار ۵- و به متغیرهای با ضریب مثبت در تابع هدف مقدار ۵ بدهیم پس حداکثر مقدار تابع هدف عبارتست از:

$$Z^* \le (۲+۶+۱+۳+۸+۴+۵+۷)\times ۵ = ۱۸۰$$

☺ ۷۶. گزینه ۲ صحیح است.

محدودیتهای مسأله مشخص نیست، با توجه به $۱ \le x_j \le ۸$ حداکثر مقدار تابع هدف زمانی حاصل می‌شود که x_jهای دارای ضریب منفی در تابع هدف را برابر ۱+ و x_jهایی که ضریب مثبت دارند را برابر ۸+ قرار می‌دهیم. (چون **Max**سازی است).

$$\Rightarrow z^* \le ۵(۸) - ۳(۱) + ۴(۸) - ۴(۱) + ۸ = ۷۳$$

☺ ۷۷. هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیستند.

با توجه به اینکه برای هر متغیر، محدودیت $-۵ \le x_j \le ۱۰$ را داریم، در تابع هدف به متغیرهایی که ضریب مثبت دارند مقدار ۵- و به متغیرهایی که ضریب منفی دارند مقدار ۱۰+ می‌دهیم زیرا تابع هدف می‌نیمم‌سازی است.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = x_۴ = x_۵ = -۵ \\ x_۲ = x_۳ = x_۶ = +۱۰ \end{cases} \Rightarrow z^* = -۱۷۵$$

☺ ۷۸. گزینه ۳ صحیح است.

این مسأله حتماً شدنی است زیرا مبدأ مختصات در محدودیت‌ها صدق می‌کند.

☺ ۷۹. گزینه ۱ صحیح است.

محدودیتها کوچکتر یا مساوی و سمت راست آنها مثبت است در نتیجه مسأله حتماً شدنی است زیرا مبدأ مختصات در محدودیتها صدق می‌کند.

☺ ۸۰. گزینه ۴ صحیح است.

اگر $b_i \ge ۰$ $(i = ۱,...,n)$ باشد منطقه موجه حتماً شامل مبدأ مختصات است زیرا حتماً مبدأ مختصات در محدودیتها صدق می‌کند.

۸۱. گزینه ۱ صحیح است.

مسأله اصلی به صورت:

$$\begin{aligned} \max\ & z = c^T x \\ & Dx \le b \ge ۰ \\ & x \ge ۰ \end{aligned}$$

است بنابراین مانند تست قبل، مسأله **P** همواره دارای جواب شدنی است.

۸۲. گزینه ۱ صحیح است.

اگر ضرایب یکی از متغیرها در تمام محدودیت‌ها غیرمثبت باشد و محدودیت‌های مسأله همگی $\le$ باشند، آنگاه ناحیه شدنی بی‌کران خواهد بود حال اگر ضریب این متغیر در تابع هدف **Max** سازی، مثبت و یا در تابع هدف **Min**سازی، منفی باشد، مسأله دارای جواب بهینه نامتناهی خواهد بود. اما از آنجا که نوع محدودیتها و تابع هدف مشخص نیست نمی‌توان اظهارنظر کرد.

۸۳. گزینه ۴ صحیح است.

با توجه به محدودیتهای $\le +$، اگر برای تمام i,jها، $a_{ij} > ۰$، ناحیه شدنی محدود بوده و مسأله نیز قطعاً بهینه متناهی (محدود) خواهد بود، اما این شرایط لازم نیست زیرا در ناحیه شدنی بی‌کران نیز ممکن است بهینه متناهی باشد.

۸۴. هیچ‌کدام از گزینه‌ها صحیح نیستند.

برای ساده شدن گزینه‌ها، دستگاه $Ax \le b$ را به صورت $x \le ۵$ و در نتیجه $Ax = b$ را به صورت $x = ۵$ در نظر بگیرید. بدیهی است $x = ۲$ یک جواب برای $x \le ۵$ است ولی جواب $x = ۵$ نمی‌باشد در نتیجه تمام گزینه‌ها غلط هستند.

به هر حال مطلب درست آن است که بگوییم هر جواب دستگاه $Ax = b$، یک جواب برای دستگاه $Ax \le b$ است، به نظر می‌رسد انتخاب گزینه ۳ در جلسه کنکور منطقی باشد!

کانالها و گروه تحقیق در عملیات مهندس ایمن پور

مدرس تحقیق در عملیات کنکور ارشد و دکتری

کانال اصلی تحقیق در عملیات ۱و۲ امیر ایمن پور

@OR۱۲_ir

گروه رفع اشکال درس تحقیق در عملیات ۱و۲

https://t.me/joinchat/BSv۵ck۳nHYzj۳s۰DmRz-iQ

کانال رفع اشکال تحقیق در عملیات ۱و۲

@OR۱۲ir

ادمین تلگرام

@imenpour

اینستاگرام تحقیق در عملیات ۱و۲

instagram.com/or۱۲.ir

سایت تحقیق در عملیات ۱و۲

www.OR۱۲.ir

ایمیل

imenpour@outlook.com