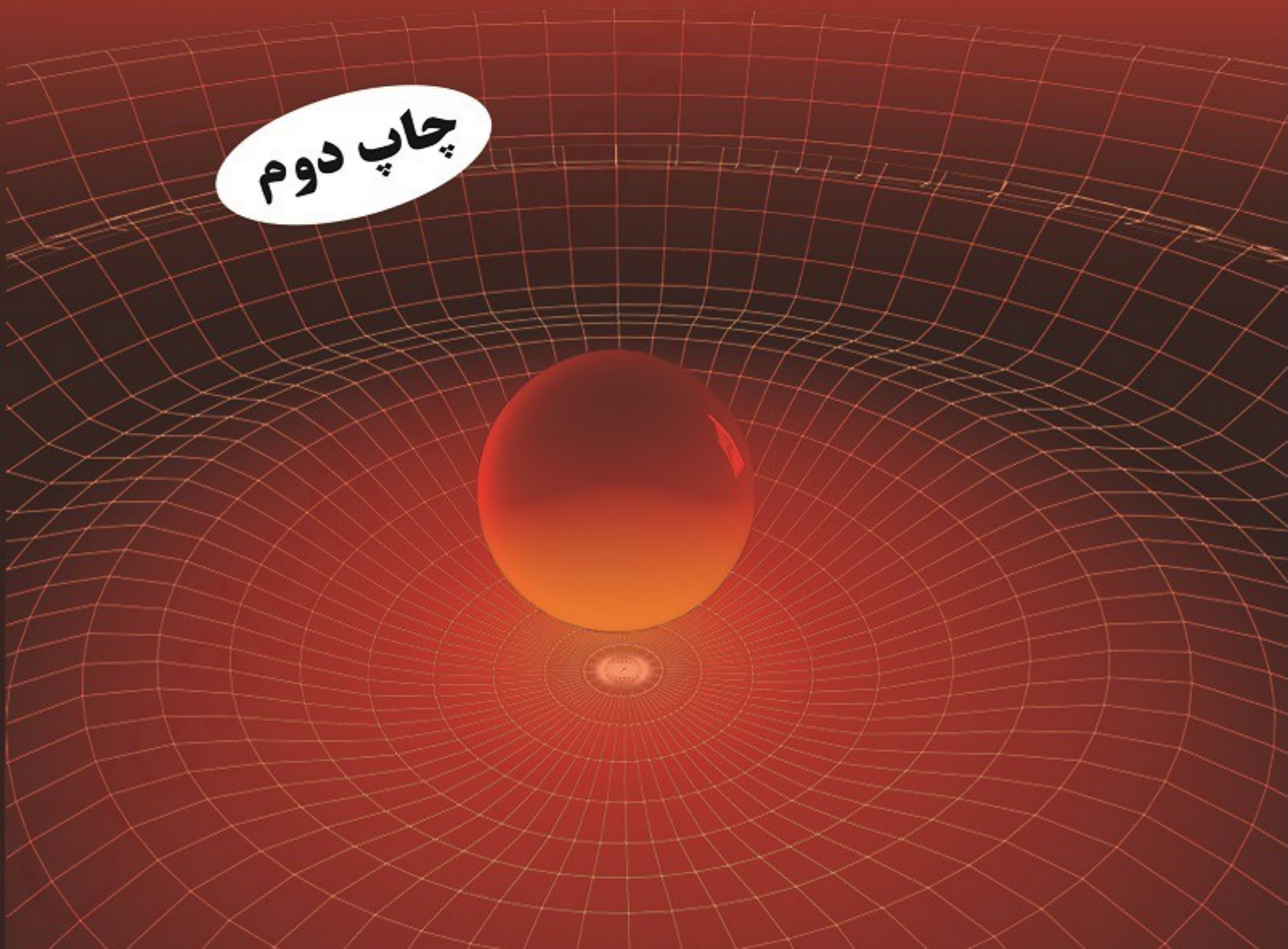
انتشارات کتابخانه فرهنگ

تحقیق در عملیات ۱

امیر ایمن پور

چاپ دوم



کانالها و گروه تحقیق در عملیات مهندس ایمن پور

مدرس تحقیق در عملیات کنکور ارشد و دکتری

کانال اصلی تحقیق در عملیات ۱و۲ امیر ایمن پور

@OR۱۲_ir

گروه رفع اشکال درس تحقیق در عملیات ۱و۲

https://t.me/joinchat/BSv۵ck۳nHYzj۳s۰DmRz-iQ

کانال رفع اشکال تحقیق در عملیات ۱و۲

@OR۱۲ir

ادمین تلگرام

@imenpour

اینستاگرام تحقیق در عملیات ۱و۲

instagram.com/or۱۲.ir

سایت تحقیق در عملیات ۱و۲

www.OR۱۲.ir

ایمیل

imenpour@outlook.com

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

۱

مفاهیم برنامه‌ریزی خطی

۱-۱- تاریخچه و معنی تحقیق در عملیات[1]

اگرچه تکنیک‌ها و مدل‌های خاصی از تحقیق در عملیات (**OR**) را می‌توان در زمان‌های خیلی دور یافت، ولی صاحب‌نظران علم **OR** بر این عقیده‌اند که این علم در خلال جنگ جهانی دوم شروع شد. بسیاری از مسائل استراتژی و تکنیکی جنگ نیروهای متفقین به حدی پیچیده بود که انتظار نمی‌رفت یک فرد بتواند جواب‌های مسائل را بدهد. برای یافتن جواب این مسائل پیچیده، دسته‌ای از دانشمندان با زمینه‌های علمی مختلف دور هم جمع شدند و واحد مخصوص را در نیروهای مسلح متفقین تشکیل دادند. موفقیت چشم‌گیر این افراد که ناشی از فشار زمان جنگ بود، در زمینه‌هایی مانند رادار، پدافند هوایی، ناوگان‌های جنگی و زیردریایی‌ها ظاهر گردید در سال ۱۹۴۱ میلادی ارتش انگلستان از این تیم‌ها بهره‌مند شد. دولت‌های دیگر متفقین نیز با مشاهده این روش‌های موفق، تیم‌های خود را تشکیل دادند و روش‌ها را پذیرفتند و به کار بستند. مسائل این گروه کلاً در زمینه عملیات نظامی بود، از این‌رو کار آنها تحت عنوان تحقیق در عملیات نظامی[2] نام گرفت.

پس از خاتمه جنگ، بسیاری از دانشمندان که در زمینه تحقیق در عملیات نظامی فعال بودند، توجه‌شان را به امکان کاربرد روش‌های مشابه در مسائل کشوری معطوف داشتند، اولین سازمان‌هایی که از **OR** استفاده نمودند مؤسسات بزرگ بودند که از بین آنها می‌توان از کمپانی‌های بزرگ نفتی نام برد. در سال‌های اخیر کاربردهای تخصصی **OR**، بسیار گسترش یافته، به طوری که شاخه‌های تخصصی مبتنی بر زمینه کاربردی آن در حال گسترش و توسعه می‌باشد.

انجمن تحقیق در عملیات آمریکا تعریف زیر را برای تحقیق در عملیات ارائه کرده است:

«تحقیق در عملیات، با تصمیم‌گیری‌های علمی در جهت طراحی و عمل بهتر سیستم‌های انسان - ماشین سر وکار دارد، تحت شرایطی خواسته شده برای تخصیص منابع نادر و کمیاب.»

در واقع تحقیق در عملیات مجموعه‌ای از مدل‌ها و تکنیک‌های کمی که از طریق روش‌های علمی، مدیران را در امر تصمیم‌گیری در شرایط منابع محدود یاری می‌دهد.

۱-۱-۱- انواع مدل‌های تحقیق در عملیات

مهم‌ترین نوع از انواع مدل‌های **OR**، مدل‌های ریاضی می‌باشد. در نوشتن این نوع مدل‌ها، فرض بر این است که متغیرها کمیت‌پذیر می‌باشند. بنابراین علائم ریاضی جهت نمایش متغیرهایی به کار می‌رود که به‌وسیله توابع ریاضی به هم مربوط می‌شوند و مدل به‌وسیله الگوریتم مناسبی حل می‌شود.

---

1. Operation Research
2. Military Operational Research

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

علاوه بر مدل‌های ریاضی، از مدل‌های شبیه‌سازی[1] و مدل‌های ابتکاری اکتشافی[2] استفاده می‌گردد. مدل‌های شبیه‌سازی رفتار دستگاه را برای دوره‌ای از زمان تقلید می‌نماید و مدل‌های ابتکاری زمانی به کار می‌روند که حل مدل‌های ریاضی بسیار طولانی یا بسیار پیچیده باشد. در این حالت با ابتکار خاص یک جواب برای دستگاه حدس زده می‌شود و سعی می‌گردد با تحقیق و بررسی، جواب‌های بهتری به دست آید.

۱-۲- برنامه‌ریزی خطی[3]

برنامه‌ریزی خطی شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضی است که با مؤثرترین روش‌های اختصاص دادن منابع محدود برای فعالیت‌های شناخته شده‌ای برای برآوردن هدف خاص (حداکثر یا حداقل کردن) سروکار دارد. برنامه‌ریزی خطی تکنیکی بسیار قوی برای فرموله نمودن و مدل‌بندی مسائلی است که به تخصیص منابع محدود بین فعالیت‌های معلوم به منظور نیل به هدفی مطلوب مربوط می‌شود. اجزاء اساسی تشکیل‌دهنده مدل ریاضی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی عبارتند از:

۱) متغیرهای تصمیم: فعالیت‌های مجهولی که بایستی تعیین شوند.

۲) قیود یا محدودیت‌ها: مدل باید متضمن قیودی باشد که متغیرهای تصمیم را در حد مقادیر شدنی آن محدود کند، این قیود به شرایط موجود در مسأله برمی‌گردد.

۳) تابع هدف: تابعی که یک رابطه خطی بین متغیرها جهت معرفی هدف مسأله بیان می‌کند و عموماً بیانگر یک سری مضامین مانند سود، هزینه، زمان و... می‌باشد و نوع این تابع (بیشینه‌سازی سود و کمینه‌سازی هزینه) برحسب شرایط مسأله تعیین می‌گردد.

۱-۲-۱- مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی

ابتدا یک مثال ارائه می‌کنیم، که به تفهیم تعریف برنامه‌ریزی خطی کمک می‌کند. مثالی که ارائه می‌کنیم عاری از هرگونه تعبیری است.

مثال ۱: مسأله زیر، نمونه‌ای از یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است.

$$\begin{aligned} \min\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_4 \le 2 \\ & 3x_2 - x_3 = 5 \\ & x_3 + x_4 \ge 3 \\ & x_1 \ge 0,\ x_3 \le 0 \end{aligned}$$

1. Simulation Models
2. Heuristics Models
3. Linear programming

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

در اینجا، x_1، x_2، x_3 و x_4 متغیرهایی هستند که باید مقدارشان به گونه‌ای تعیین شود که تابع هزینه خطی $2x_1 - x_2 + 4x_3$، در رابطه با مجموعه‌ای از قیدهای معادله و نامعادله خطی می‌نیمم شود. بعضی از این قیدها، مانند $x_1 \geq 0$ و $x_3 \leq 0$، که در واقع علامت متغیرها را محدود می‌کنند، ساده هستند. سایر قیدها به صورت $a^i x = b_i$، $a^i x \leq b_i$ یا $a^i x \geq b_i$ هستند، که در آن a^i یک بردار مفروض و $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ بردار متغیرهای تصمیم است.

حال به تعمیم مسأله بالا می‌پردازیم. در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی عمومی، یک بردار هزینه $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ مفروض است و می‌خواهیم تابع هزینه خطی $cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ را برای همه بردارهای n بعدی $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در رابطه با مجموعه‌ای از قیدهای معادله و نامعادله خطی، می‌نیمم کنیم. بویژه فرض کنید M_1, M_2, M_3 مجموعه‌های متناهی از اندیس‌ها باشند، و فرض کنید که به ازای هر i در هر یک از این مجموعه‌ها، یک بردار n بعدی a^i و یک عدد b_i وجود دارد به طوری که قید iام را تعریف می‌کنند. هم‌چنین، فرض کنید زیرمجموعه‌های N_1 و N_2 مجموعه $\{1, \ldots, n\}$، به ترتیب، نشان‌دهنده اندیس متغیرهای x_j نامنفی و نامثبت باشند. در این صورت مسأله،

$$
\begin{aligned}
&\min cx \\
&a^i x \geq b_i \qquad i \in M_1 \\
&a^i x \leq b_i \qquad i \in M_2 \\
&a^i x = b_i \qquad i \in M_3 \\
&x_j \geq 0 \qquad j \in N_1 \\
&x_j \leq 0 \qquad j \in N_2
\end{aligned}
$$

را در نظر می‌گیریم. به $x_1, \ldots, x_n$ متغیرهای تصمیم می‌گوییم. بردار x صادق در همه قیدها را یک جواب شدنی یا بردار شدنی می‌گوییم. مجموعه جواب‌های شدنی را مجموعه شدنی یا ناحیه شدنی می‌نامیم. اگر j نه در N_1 و نه در N_2 باشد، آنگاه هیچ علامتی بر x_j وجود ندارد و در این حالت می‌گوییم که x_j یک متغیر آزاد یا نامقید است. تابع cx، تابع هدف یا تابع هزینه نامیده می‌شود. یک جواب شدنی x^* که تابع هدف را می‌نیمم می‌کند (یعنی، $cx^* \leq cx$، به ازای هر جواب شدنی x) یک جواب شدنی بهینه، یا به طور ساده، یک جواب بهینه نامیده می‌شود. در این صورت به cx^* هزینه بهینه گوییم. از طرف دیگر، اگر به ازای هر عدد حقیقی k بتوان یک جواب شدنی x پیدا کرد به طوری که هزینه آن کوچکتر از k باشد، آنگاه می‌گوییم که هزینه بهینه $-\infty$ است یا این که هزینه بهینه از پایین نامحدود می‌باشد. (گاهی اوقات، به طور ساده می‌گوییم مسأله نامحدود یا بی‌کران است.)

OR12_ir OR12.ir

۱-۲-۲- مسائل متعارفی، استاندارد و فرم ماتریسی آن

فرم متعارفی مسأله می‌نیمم‌سازی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\
& \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ge b_m \\
& x_1, \quad x_2, \ \dots, \quad x_n \ge 0
\end{aligned}$$

در اینجا:

۱- $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای تصمیم‌گیری (متغیرها، متغیرهای ساختاری، یا سطوح فعالیت) هستند که باید مشخص شوند.

۲- نامساوی $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$ ، i امین محدودیت (ضمنی یا تابعی، ساختاری و یا فنی) را نشان می‌دهد. ضرایب a_{ij} به ازای $i = 1,\dots,m$ ، $j = 1,\dots,n$ را ضرایب فنی می‌نامند. ضرایب فنی، ماتریس محدودیت A را تشکیل می‌دهد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

بردار ستونی که i امین مؤلفه‌اش b_i است، و بردار سمت راست نامیده می‌شود، حداقل مقدار مورد نیاز را برای برقراری تساوی نشان می‌دهد. محدودیت‌های $x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$ محدودیت‌های نامنفی هستند.

۳- $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ تابع هدف (تابع معیار یا تابع مقصود) است که باید بهینه شود و با حرف z نشان می‌دهیم. ضرایب $c_1, c_2, \dots, c_n$ ضرایب هزینه (معلوم) هستند.

مسأله برنامه‌ریزی خطی فوق را می‌توان با نماد ماتریسی به شکل ساده‌تری بیان کرد. به این منظور مسأله را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ , i = 1,\dots,m \\
& x_j \ge 0 \ , \ j = 1,\dots,n
\end{aligned}$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

بردار سطری $(c_1,c_2,\dots,c_n)$ را با $\mathbf{c}$ نشان دهید و بردارهای ستونی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{b}$ و ماتریس $m\times n$، $\mathbf{A}$ را چنین در نظر بگیرید:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

آن وقت مسأله می‌تواند به صورت زیر نوشته شود که به آن فرم استاندارد می‌نیمم‌سازی گویند:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{cx} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax}=\mathbf{b} \\ & \mathbf{x}\geq 0 \end{aligned}$$

فرم متعارفی و استاندارد مسائل می‌نیمم‌سازی و ماکزیمم‌سازی در جدول زیر آمده است.

	مسأله‌ی می‌نیمم‌سازی	مسأله‌ی ماکزیمم‌سازی
شکل استاندارد[1]	$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0, j=1,\dots,n$	$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0, j=1,\dots,n$
شکل متعارفی[2]	$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0, j=1,\dots,n$	$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i, i=1,\dots,m$ $x_j \geq 0, j=1,\dots,n$

۱-۲-۳- فرضیات برنامه‌ریزی خطی[3]

برای نشان دادن یک مسأله بهینه‌سازی به صورت یک برنامه‌ریزی خطی، چند فرض الزامی در فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی احتیاج است، بحث مختصری از آن در اینجا ارائه می‌شود.

1. Standard form
2. Canonical form
3. Assumptions of linear programming

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

۱- **فرض تناسب**[1]: سهم متغیر x_j در هزینه c_jx_j و در iامین محدودیت $a_{ij}x_j$ است. این بدان معنی است که اگر مثلاً، x_j دوبرابر شود، نسبت سهمش در هزینه‌ها و در هریک از محدودیتها نیز دوبرابر می‌شود، توجه شود که استفاده بیشتر از فعالیت jام هزینه بیشتری دربر دارد یعنی هیچگونه صرفه‌جویی یا درآمدی یا پس‌اندازی بر آن مترتب نیست و همچنین هیچ‌گونه هزینه راه‌اندازی برای شروع این فعالیت منظور نمی‌شود. طبق این فرض توان تمام متغیرها باید یک باشد.

۲- **فرض جمع‌پذیری**[2]: این فرض تضمین می‌کند که هزینه کل، مجموع هزینه‌های انفرادی است و آنکه سهم کل iامین محدودیت مجموع سهام انفرادی فعالیتهای انفرادی است، به بیان دیگر تأثیرات جایگزینی یا متقابل بین فعالیت‌ها وجود ندارد.

۳- **بخش‌پذیری (تقسیم‌پذیری**[3]**)**: این فرض می‌گوید که متغیرهای تصمیم می‌توانند به هر اندازه که لازم باشد تقسیم شوند و بنابراین مجازند مقادیر ناصحیح بگیرند و در نتیجه متغیرهای تصمیم، متغیرهای پیوسته می‌باشند. در صورت نقض این فرض مسأله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح خواهد بود.

۴- **فرض معین بودن**[4] **(قطعیت)**: ضرایب c_j، a_{ij} و b_i همه بطور قطعی معلوم هستند. فرض می‌شود هر عنصر احتمالی یا تصادفی که بطور ذاتی در تقاضا، هزینه، قیمتها، منابع موجود، کاربردها و غیره وجود دارد با معادل قطعی‌اش با این ضرایب تقریب زده شود.

۱-۲-۴- دستکاری مسأله[5]

مسأله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان با دستکاری ساده از یک شکل به شکل معادل دیگری تبدیل کرد، این دستکاری همان‌گونه که در ادامه خواهید دید از اهمیت زیادی برخوردار است.

۱- تبدیل نوع تابع هدف

برای تبدیل مسأله ماکزیمم‌سازی به می‌نیمم‌سازی و برعکس توجه داشته باشید که:

$$\max\ z = cx \quad \Leftrightarrow \quad -\min\ z = -cx$$

یا

$$\max\ z = cx \quad \Leftrightarrow \quad \min\ (-z) = -cx$$

مسأله ماکزیمم‌سازی (می‌نیمم‌سازی) می‌تواند به مسأله‌ی می‌نیمم‌سازی (ماکزیمم‌سازی) با ضرب ضرایب تابع هدف در ۱- به دست آید. بعد از بهینه شدن مسأله جدید، تابع هدف مسأله‌ی قبلی از منفی کردن تابع هدف بهینه مسأله

1. Proportionality assumption
2. Additivity assumption
3. Divisibility assumption
4. Deterministic assumption
5. Problem manipulation

OR12_ir OR12.ir

جدید به دست می‌آید، در نتیجه منفی اول روش را عوض می‌کند، در حالی که منفی دوم مقدار تابع هدفها را با هم مساوی می‌کند.

۲- تبدیل جهت محدودیتهای نامساوی

یک نامساوی در یکی از جهت‌های ($\geq$ یا $\leq$) را می‌توان با ضرب نمودن در عدد (-1) به صورت ($\leq$ یا $\geq$) درآورد:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1 \quad \Leftrightarrow \quad -a_1x_1 - a_2x_2 \geq -b_1$$

۳- تبدیل محدودیت تساوی به نامساوی

هر محدودیت تساوی را می‌توان به دو محدودیت نامساوی به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 \geq b_1 \end{cases}$$

بنابراین m محدودیت تساوی را می‌توان به $2m$ محدودیت نامساوی تبدیل کرد:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \end{cases}$$

همچنین با تبدیلات زیر می‌توان تعداد محدودیت‌ها را به $m+1$ کاهش داد:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \;\; ; \;\; i = 1,\dots,m \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i \end{cases}$$

۴- تبدیل محدودیت نامساوی به تساوی

$$\begin{matrix} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a_1x_1 + a_2x_2 + s_1 = b_1 \\ x_1, x_2, s_1 \geq 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_1x_1 + a_2x_2 \geq b_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a_1x_1 + a_2x_2 - s_2 = b_1 \\ x_1, x_2, s_2 \geq 0 \end{matrix}$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

در بیشتر کتابها نام متغیرهای کمکی[1] جهت متغیرهایی نظیر s_1 و متغیرهای مازاد[2] جهت متغیرهایی نظیر s_2 بکار می‌رود. در این کتاب نام متغیر کمکی را برای هر دو نوع بکار خواهیم برد. متغیرهای کمکی در مسأله باقیمانده و مقادیر آنها در جواب بهینه، اطلاعات با ارزشی به ما می‌دهند.

به فرم متعارفی مسائل زیر و تبدیل آنها به فرم استاندارد توجه کنید:

$$\begin{array}{ll} \text{Max } cx & \\ \text{s.t.} \quad Ax \le b & \\ \qquad x \ge 0 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Max } cx & \\ \text{s.t.} \quad Ax + Is = b & \\ \qquad x, s \ge 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Min } cx & \\ \text{s.t.} \quad Ax \ge b & \\ \qquad x \ge 0 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Min } cx & \\ \qquad Ax - Is = b & \\ \qquad x, s \ge 0 & \end{array}$$

۵- مقید کردن متغیرهای آزاد در علامت و نامنفی کردن آنها

روش سیمپلکس برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی که متغیرهای نامنفی دارند طراحی شده است. اگر متغیر x_j در علامت آزاد باشد آن وقت روشهای زیر برای مقید کردن وجود دارد:

الف) در مسأله متغیر آزاد در علامت x_j را با $x_j = x'_j - x''_j$ که در آن $x'_j, x''_j \ge 0$ جایگزین می‌کنیم و اگر در یک مسأله می‌نیمم‌سازی در تابع هدف $|x_j|$ وجود داشت آن را با $|x_j| = x'_j + x''_j$ جایگزین می‌کنیم. البته باید $c_j \ge 0$ باشد زیرا اگر $c_j < 0$ تبدیل فوق به کار نمی‌رود. دلیل این مطالب را در ضمیمه فصل ۲ بررسی خواهیم کرد. در نتیجه با این روش k متغیر نامقید را با $2k$ متغیر مقید می‌توان جایگزین کرد.

ب) اگر $x_1, x_2, \ldots, x_k$ یک مجموعه k متغیری باشد که تمام آنها در علامت آزاد هستند آن وقت فقط یک متغیر اضافی x'' در رابطه جای‌گزینی $x_j = x'_j - x''$ به ازای $j = 1, \ldots, k$، که در آن $x'_j \ge 0$ و $x'' \ge 0$ احتیاج است. بدین صورت که بجای تعریف $x_j = x'_j - x''_j$، $x'_j, x''_j \ge 0$ برای هر متغیر آزاد در علامت، متغیر اضافی x'' را به صورت $x'' = \text{Max}\{x''_j : x''_j \ge 0\}$ تعریف کنیم، در اینجا $-x''$ نقش منفی‌ترین متغیر را دارد در حالی که سایر متغیرهای x_j به اندازه x'_j بیش‌تر از آن هستند، در نتیجه k متغیر آزاد در علامت را با حداقل $k+1$ متغیر نامنفی می‌توان جایگزین کرد.

ج) در صورت وجود متغیر آزاد در علامت در یک محدودیت تساوی، آن را برحسب سایر متغیرها بدست آورده و در سایر محدودیتها و تابع هدف جایگزین کرده و مسأله را با یک محدودیت و یک متغیر کمتر حل می‌کنیم. فرض کنید x_1 یک متغیر آزاد در علامت بوده و محدودیت iام به صورت،

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

---

1. Slack
2. Surplus

OR12_ir OR12.ir

باشد، این قید معادل $x_1 = \frac{b_i - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n}{a_{i1}}$ است و چون محدودیت دیگری روی x_1 نیست وقتی مقادیر بهین سایر متغیرها بدست آیند مقدار بهین x_1 با جایگزین کردن مقادیر x_2 تا x_n در این عبارت بدست می‌آید. با جایگزینی این عبارت در قیود و تابع هدف متغیر x_1 از تمام قیود مسأله حذف خواهد شد و باید محدودیت i ام را نیز بدون تأمل حذف کرد. حذف هر متغیر آزاد در علامت به این طریق، تعداد متغیرها را در مسأله برنامه‌ریزی خطی کاهش داده و بعلاوه باعث کاهش تعداد قیود می‌شود و در نتیجه مسأله آسانتر حل می‌شود.

مثال ۲: مسأله زیر را که مثال خاصی از روش فوق است، ملاحظه کنید.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

چون x_1 آزاد است، مقدار آن را از قید اول بدست می‌آوریم و داریم:

$$x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$$

با جایگذاری x_1 در تابع هدف و قید دوم، به مسأله معادلی به صورت زیر خواهیم رسید (با کم کردن پنج از تابع هدف):

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 + 3x_3 \\ & x_2 + x_3 = 4 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

نحوه حل این مسأله در همین فصل بررسی خواهد شد، جواب عبارت است از $x_2 = 4$ و $x_3 = 0$ و در نتیجه $x_1 = -3$.

۶- متغیرهایی که از بالا یا پایین کراندار هستند.

اگر $x_j \geq l_j$، آنگاه متغیر جدید $x'_j = x_j - l_j$ $(x'_j \geq 0)$ را در محدودیتها و تابع هدف جایگذاری می‌کنیم.

اگر $x_j \leq u_j$، آنگاه متغیر جدید $x'_j = u_j - x_j$ $(x'_j \geq 0)$ را در محدودیتها و تابع هدف جایگذاری می‌کنیم.

۷- حذف قدرمطلق

الف) حذف قدرمطلق محدودیتها

محدودیتی که دارای قدرمطلق است را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$|f(x)| \leq a \Rightarrow f(x) \leq a \text{ و } f(x) \geq -a$$

$$|f(x)| \geq a \Rightarrow f(x) \geq a \text{ یا } f(x) \leq -a$$

توجه شود که محدودیت $|f(x)| \geq a$ فرض تقسیم‌پذیری را به دلیل پیوسته نبودن فضای جواب نقض می‌کند.

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

مثال ۳: فرم متعارفی مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 4x_1+3x_2+5x_3\\
&\text{s.t.} \quad x_1+2x_2-x_3 \ge 5\\
&\qquad |x_2-3x_3| \le 3\\
&\qquad -2x_1-x_2+x_3 \le 2\\
&\qquad 3x_1-2x_2+3x_3 = 4\\
&\qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \text{ نامقید}
\end{aligned}$$

با اعمال تغییرات زیر،

$$x_2' = -x_2\ ,\ x_2' \ge 0$$

$$x_3 = x_3' - x_3''\ ,\ x_3', x_3'' \ge 0$$

$$|f(x)| \le b \Rightarrow \begin{cases} f(x) \le b \\ f(x) \ge -b \Rightarrow -f(x) \le b \end{cases}$$

$$g(x) = b \Rightarrow \begin{cases} g(x) \le b \\ -g(x) \le -b \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } 4x_1-3x_2'+5x_3'-5x_3''\\
&\text{s.t.} \quad -x_1+2x_2'+x_3'-x_3'' \le -5\\
&\qquad -x_2'-3x_3'+3x_3'' \le 3\\
&\qquad x_2'+3x_3'-3x_3'' \le 3\\
&\qquad -2x_1+x_2'+x_3'-x_3'' \le 2\\
&\qquad 3x_1+2x_2'+3x_3'-3x_3'' \le 4\\
&\qquad -3x_1-2x_2'-3x_3'+3x_3'' \le -4\\
&\qquad x_1, x_2', x_3', x_3'' \ge 0
\end{aligned}$$

ب) حذف قدرمطلق در تابع هدف

روش اول: به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } |f(x)|+g(x) \Rightarrow \text{Max } z+g(x)\\
&\qquad\qquad \text{s.t.} \quad z \le |f(x)|\\
&\text{Min } |f(x)|+g(x) \Rightarrow \text{Min } z+g(x)\\
&\qquad\qquad \text{s.t.} \quad z \ge |f(x)|
\end{aligned}$$

Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

روش دوم: اگر تابع هدف یک مسأله می‌نیمم‌سازی شامل قدرمطلق بود، می‌توان داخل قدرمطلق را یک متغیر نامقید تعریف و این عبارت را به عنوان یک محدودیت در مسأله وارد کرد، در ادامه، کار را با مباحث متغیرهای نامقید جهت مقید کردن آنها ادامه می‌دهیم.

$$\begin{aligned} &\text{Min } |f(x)|+g(x) \Rightarrow \text{ Min } |y|+g(x) \\ &\qquad \text{s.t.} \quad y=f(x) \end{aligned}$$

y آزاد در علامت

مثال ۴: تابع هدف $\text{Min } z=|2x_1-x_2|$ را در نظر بگیرید، حذف قدر مطلق بصورت زیر انجام می‌شود:

روش اول:

$$\begin{aligned} &\text{Min } z=z_1 \\ &z_1 \geq |2x_1-x_2| \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Min } z=z_1 \\ &2x_1-x_2 \leq z_1 \\ &2x_1-x_2 \geq -z_1 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\text{Min } z=|2x_1-x_2| \quad \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Min } z=|y| \\ &y=2x_1-x_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{aligned} &\text{Min } z=y_1+y_2 \\ &y_1-y_2=2x_1-x_2 \\ &y_1,y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۵: مسأله

$$\begin{aligned} &\min 2|x_1|+x_2 \\ &\text{s.t. } x_1+x_2 \geq 4 \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید، اولین روش مسأله،

$$\begin{aligned} &\min 2z_1+x_2 \\ &x_1+x_2 \geq 4 \\ &z_1 \geq x_1 \\ &z_1 \geq -x_1 \end{aligned}$$

و دومین روش مسأله زیر را بدست می‌دهد:

$$\begin{aligned} &\min 2x_1'+2x_1''+x_2 \\ &x_1'-x_1''+x_2 \geq 4 \\ &x_1',x_1'' \geq 0 \end{aligned}$$

۸- توابع هدف مرکب

در صورتی که تابع هدف به یکی از دو صورت زیر بود، آن را با تغییر متغیر به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کنیم.

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

حالت اول: $\text{Max } z = \text{Min}\{f_1(x_1,x_2,...,x_n), f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_k(x_1,x_2,...,x_n)\}$

اگر $y = \text{Min}\{f_1(x_1,x_2,...,x_n), f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_k(x_1,x_2,...,x_n)\}$ را تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } z = y \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad y \le f_1(x_1,x_2,...,x_n) \\
&\qquad y \le f_2(x_1,x_2,...,x_n) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad y \le f_k(x_1,x_2,...,x_n)
\end{aligned}$$

حالت دوم: $\text{Min } z = \text{Max}\{f_1(x_1,x_2,...,x_n), f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_k(x_1,x_2,...,x_n)\}$

اگر $y = \text{Max}\{f_1(x_1,x_2,...,x_n), f_2(x_1,x_2,...,x_n),...,f_k(x_1,x_2,...,x_n)\}$ تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } z = y \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad y \ge f_1(x_1,x_2,...,x_n) \\
&\qquad y \ge f_2(x_1,x_2,...,x_n) \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad y \ge f_k(x_1,x_2,...,x_n)
\end{aligned}$$

نکته: اگر در حالت $\text{Max } z = \text{Min}\{...\}$ عبارت قدرمطلقی داشتیم از آنجا که محدودیت $y \le |f_i|$ بوجود می‌آید و فضای حل را گسسته می‌کند، مسأله قابل تبدیل به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح (ILP) است.

مثال ۶: مدل برنامه‌ریزی خطی معادل با مدل زیر را بدست آورید:

$$\begin{aligned}
&\min z = \max\{۲x_1 - ۳x_2, ۴x_1 + x_2, x_1 - ۲x_2\} \\
&\quad \text{s.t.} \qquad ۴x_1 + ۳x_2 = ۲
\end{aligned}$$

حل: با در نظر گرفتن $y = \max\{۲x_1 - ۳x_2, ۴x_1 + x_2, x_1 - ۲x_2\}$، داریم:

$$\begin{aligned}
&\min \quad z = y & & \min \quad z = y \\
&\quad y \ge ۲x_1 - ۳x_2 & \Rightarrow \quad & ۲x_1 - ۳x_2 - y \le ۰ \\
&\quad y \ge ۴x_1 + x_2 & & ۴x_1 + x_2 - y \le ۰ \\
&\quad y \ge x_1 - ۲x_2 & & x_1 - ۲x_2 - y \le ۰ \\
&\quad ۴x_1 + ۳x_2 = ۲ & & ۴x_1 + ۳x_2 = ۲
\end{aligned}$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

مثال ۷: یک مدل برنامه‌ریزی معادل با مدل زیر بدست آورید:

$$\max z = \min\{|2x_1 - 3x_2|, 4x_1 + x_2, x_1 - 2x_2\}$$
$$\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 = 2$$

حل: با در نظر گرفتن $y = \max\{|2x_1 - 3x_2|, 4x_1 + x_2, x_1 - 2x_2\}$، داریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = y \\ & y \le |2x_1 - 3x_2| \\ & y \le 4x_1 + x_2 \\ & y \le x_1 - 2x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 = 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & z = y \\ & 4x_1 + x_2 - y \ge 0 \\ & x_1 - 2x_2 - y \ge 0 \\ & 4x_1 + 3x_2 = 2 \\ & 2x_1 - 3x_2 - y \ge 0 \\ & \text{یا} \\ & 2x_1 - 3x_2 + y \le 0 \end{aligned}$$

بدیهی است مسأله حاصل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح **(ILP)** است.

هر **LP** با تبدیلات مطرح شده در این فصل می‌تواند به شکل استاندارد تبدیل شود. مسأله در شکل استاندارد هم‌ارز مسأله‌ای است که در آن تمام قیود خطی به شکل معادله با متغیرهای نامنفی باشند، بنابراین برای مطالعه **LP**ها کافی است بحث را به دستگاه‌های معادلات خطی با متغیرهای نامنفی محدود کنیم.

۱-۲-۵- انواع محدودیت‌های یک مسأله برنامه‌ریزی خطی

۱- محدودیت‌های کارکردی[1] (قیود)

بیانگر محدودیتهای منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می‌باشد که به صورت بزرگتر یا مساوی ($\ge$) کوچکتر یا مساوی($\le$) و یا مساوی ($=$) نمایش داده می‌شوند.

۲- محدودیتهای غیرکارکردی یا متغیرهای تصمیم[2]

نشان دهنده مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت بوده و با (x_j) نمایش داده می‌شود. این متغیرها می‌توانند به صورت نامنفی، نامثبت و یا آزاد در علامت مورد استفاده قرار گیرند.

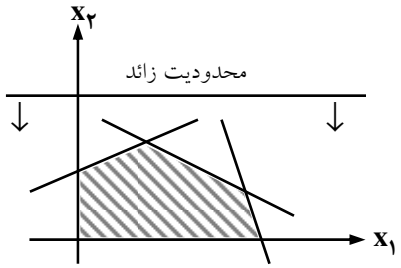
۳- محدودیت زائد[3] (وابسته)

محدودیتی است که تأثیری در ایجاد منطقه‌ی موجه ندارد و وجود و یا عدم وجود آن موجب تغییر منطقه‌ی موجه و جواب بهینه نمی‌شود.

1. Functional Constrains
2. Decision Variable
3. Redundant constraint

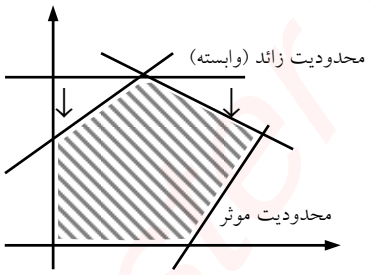
OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor



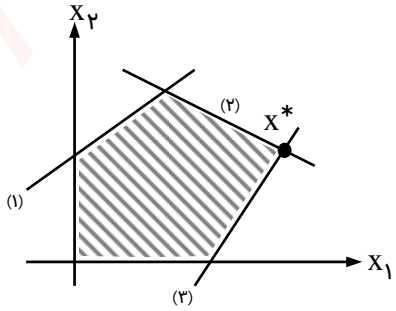
۴- محدودیت موثر

محدودیتی است که در ایجاد منطقه‌ی موجه موثر است. اضافه شدن هر محدودیت موثر موجب کاهش منطقه موجه و کاهش هر محدودیت موثر از مسأله موجب افزایش منطقه موجه می‌شود.



۵- محدودیت فعال یا الزام‌آور[1] در نقطه بهینه

محدودیتی است که از نقطه بهینه عبور می‌نماید، یعنی اگر مختصات نقطه بهینه را در آن قرار دهیم به تساوی تبدیل خواهد شد و محدودیت غیرفعال یا غیرالزام‌آور[2] محدودیتی است که از نقطه بهینه عبور نمی‌کند. در شکل زیر با فرض اینکه x^* نقطه بهینه است، محدودیت‌های (۲) و (۳) محدودیت فعال هستند در حالیکه (۱) محدودیت غیرفعال است. البته در نقاط دیگر نیز می‌توان محدودیت فعال را تعریف کرد ولی اگر به نقطه خاصی اشاره نشود منظور از محدودیت فعال، محدودیت فعال در نقطه بهینه است.



1. Binding Constraint
2. Nobinnding Constraint

OR12_ir OR12.ir

۱-۲-۶- حل هندسی[1] یا روش ترسیمی

این روش فقط برای حل مسائل بسیار کوچک مناسب است ولی دیدگاه وسیعی از مسأله برنامه‌ریزی خطی فراهم می‌آورد. در این قسمت یک راه‌حل ترسیمی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی که شامل دو متغیر تصمیم می‌باشند ارائه می‌گردد. اگرچه در عمل با چنین مسائل کوچکی روبرو نمی‌شویم، ولی این مطالب برای توضیح ایده‌هایی می‌باشد که در حل مسائل برنامه‌ریزی خطی بزرگ به‌کار می‌رود، مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\text{Min } Cx \\ &\text{s.t.} \quad Ax \geq b \\ &\qquad\;\; x \geq ۰ \end{aligned}$$

مرحله اول: رسم ناحیه شدنی یا موجه

ناحیه شدنی، اشتراک فضای شدنی محدودیتهای مسأله است، به عبارت دیگر مجموعه نقاطی است که در همه محدودیت‌های مسأله صدق کند. بعد از رسم محدودیتها بصورت تساوی (رسم معادله حدی هر محدودیت) جهت پیدا کردن منطقه موجه محدودیتها به یکی از دو شیوه زیر عمل می‌کنیم:

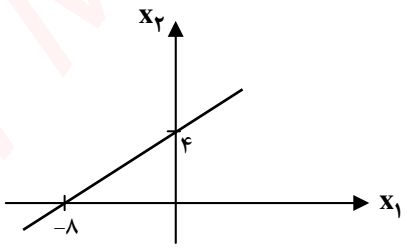
الف) با صدق دادن نقطه‌ای در محدودیت (نقطه‌ای که روی محدودیت نباشد) می‌توان منطقه موجه محدودیت را تعیین کرد. (اگر محدودیت از مبدا مختصات عبور نکرده باشد، مبدأ را صدق می‌دهند.)

ب) اگر محدودیت به صورت $\geq$ بود منطقه موجه در جهت بردار a و اگر محدودیت به صورت $\leq$ بود منطقه موجه در جهت بردار $-a$ می‌باشد.

در نهایت اشتراک نواحی بدست آمده، ناحیه شدنی را نتیجه می‌دهد.

مثال ۸: محدودیت $-x_۱ + ۲x_۲ \leq ۸$ را رسم کنید.

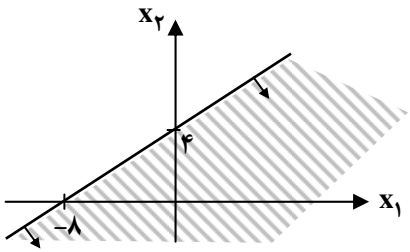
حل: ابتدا محدودیت را بصورت تساوی رسم می‌کنیم:



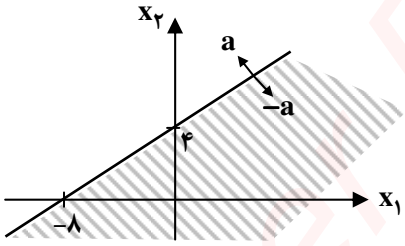
روش الف) مبدأ مختصات روی این محدودیت قرار ندارد، از آنجا که مبدأ در این محدودیت صدق می‌کند، فضای شدنی این محدودیت بصورت زیر است:

1. Geometric solution

OR12_ir OR12.ir



روش ب) با توجه به $a=(-1,2)$ و این که محدودیت داده شده به صورت $\leq$ است، منطقه موجه در جهت $-a=(1,-2)$ خواهد بود.



مرحله دوم: پیداکردن جواب بهینه

• روش اول: بررسی نقاط رأسی[1]

یک مسأله برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد $(Ax=b;\ x\geq 0)$ را در نظر بگیرید، اگر یک حل بهینه موجود باشد، یک نقطه رأسی بهینه نیز وجود دارد. (نقاط رأسی و ویژگی‌های آن را در فصل بعد مورد بحث قرار می‌دهیم.) این روش در بعضی مسائل قابل اجراست و استفاده از آن، بدون بررسی مسأله ممکن است جواب نادرستی بدهد زیرا امکان دارد مسأله اساساً جواب بهینه‌ای نداشته باشد، این حالت فقط در صورتی اتفاق می‌افتد که:

۱) مسأله اصولاً جواب موجهی نداشته باشد.

۲) محدودیتها نتوانند از افزایش نامتناهی تابع هدف در جهت مطلوب (مثبت یا منفی) جلوگیری کنند.

• روش دوم: حرکت تابع هدف روی ناحیه شدنی

بردار گرادیان[2]: اگر مشتقات جزئی $f: R^n \longrightarrow R$ در نقطه p تعریف شوند، بردار گرادیان بصورت:

$$\nabla f(p)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

تعریف می‌شود که در واقع همان ماتریس مشتق تابع f در نقطه p است.

1. Extreme points
2. Gradient

OR12_ir OR12.ir

در یک مسأله می‌نیمم‌سازی، در ناحیه شدنی مسأله می‌خواهیم نقطه‌ای که کمترین مقدار $\mathbf{cx}$ را دارد پیدا کنیم، می‌دانیم نقاطی که در معادله $\mathbf{z = cx}$ صدق می‌کنند دارای مقدار تابع هدف یکسان هستند، می‌دانیم بردار $\mathbf{c}$، بردار گرادیان $\mathbf{z = cx}$ است و با حرکت در جهت $\mathbf{c}$ مقدار $\mathbf{z}$ افزایش می‌یابد و با حرکت در جهت $-\mathbf{c}$ مقدار $\mathbf{z}$ کاهش می‌یابد، بنابراین در یک مسأله مینیمم‌سازی صفحه $\mathbf{z = cx}$ را در جهت $-\mathbf{c}$ تا حد ممکن حرکت می‌دهیم تا به نقطه‌ای برسیم که اگر بیشتر از آن در جهت $-\mathbf{c}$ حرکت کنیم از ناحیه شدنی خارج شویم. نقطه بدست آمده نقطه بهینه $(\mathbf{x}^*)$ است.

روش مذکور برای مسائلی با دو متغیر مناسب است و بدیهی است که برای مسائلی با بیش از سه متغیر عملی نیست. همچنین در یک مسأله ماکزیمم‌سازی صفحه $\mathbf{z = cx}$ در جهت $\mathbf{c}$ تا حد ممکن حرکت می‌دهیم تا به نقطه‌ای برسیم که اگر بیشتر از آن در جهت $\mathbf{c}$ حرکت کنیم از ناحیه شدنی خارج شویم، نقطه بدست آمده نقطه بهینه است.

- **روش سوم: رسم بردارهای عمود بر محدودیتهای گذرنده از نقاط رأسی**

در تمام نقاط رأسی، برای هر محدودیت برداری عمود بر محدودیت، به سمت خارج فضای شدنی رسم می‌کنیم و مخروط حاصل از آنها را هاشور می‌زنیم، نقطه بهینه نقطه‌ای است که بردار $-\mathbf{c}$ در مینیمم‌سازی (بردار $\mathbf{c}$ در ماکسیمم‌سازی) در مخروط حاصل از بردارهای رسم شده روی آن نقطه قرار گیرد. به عبارت دیگر مخروط به وجود آمده به وسیله‌ی عمودهای وارده به محدودیت‌هایی که از نقطه‌ی $\mathbf{x}^*$ می‌گذرند شامل بردار $-\mathbf{c}$ است. در واقع این یک **شرط لازم و کافی** برای بهینه بودن $\mathbf{x}^*$ است. به طور شهودی وقتی این شرط واقع می‌شود، می‌توان نشان داد که **جهتی که بتوان در امتداد آن حرکت کرد و تابع هدف را در عین شدنی بودن بهبود بخشید وجود ندارد.**

در یک مسأله می‌نیمم‌سازی چنین جهتی برای بهبود تابع هدف باید: الف) با بردار $-\mathbf{c}$ زاویه حاده بسازد، ب) با هر یک از عمودهای وارد بر محدودیت‌ها هم زمان زاویه $\geq ۹۰^\circ$ بسازد تا در امتداد آن شرط شدنی بودن برقرار باشد.

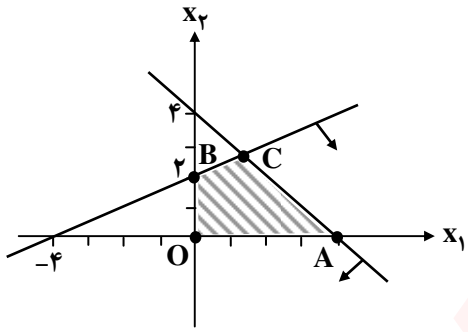
این وضعیت در هر جواب بهینه غیرممکن است گرچه در هر جواب غیربهینه امکان‌پذیر است.

مثال ۹: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max\ z = x_۱ + ۳x_۲$$
$$x_۱ - ۲x_۲ \geq -۴$$
$$-x_۱ - x_۲ \geq -۴$$
$$x_۱\ ,\ x_۲ \geq ۰$$

روش اول – با رسم ناحیه شدنی مقدار تابع هدف را در نقاط رأسی بررسی می‌کنیم:

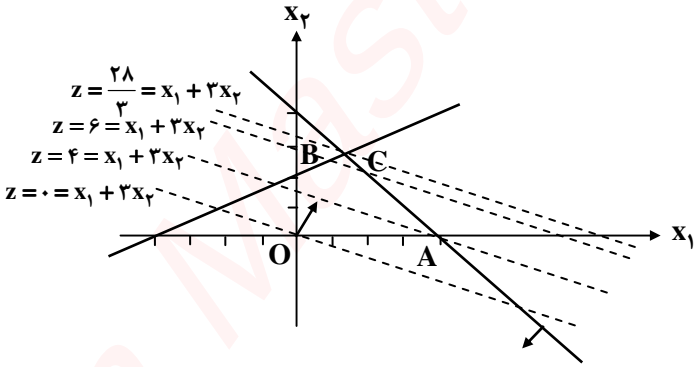
OR12_ir OR12.ir



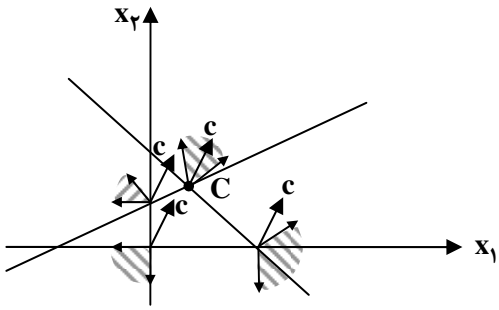
$$O\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix} \qquad A\begin{vmatrix}۴\\۰\end{vmatrix} \qquad B\begin{vmatrix}۰\\۲\end{vmatrix} \qquad C\begin{vmatrix}\frac{۴}{۳}\\\frac{۸}{۳}\end{vmatrix} \quad , \quad z = x_۱ + ۳x_۲$$

$$z_O = ۰ \quad , \quad z_A = ۴ \quad , \quad z_B = ۶ \quad , \quad z_C = \frac{۲۸}{۳} \overset{Max}{\Rightarrow} x^* = \begin{pmatrix}\frac{۴}{۳}\\\frac{۸}{۳}\end{pmatrix}, z^* = \frac{۲۸}{۳}$$

روش دوم – با رسم بردار گرادیان تابع هدف و حرکت در جهت آن، نقطه رأسی **C**، جواب بهینه مسأله است:



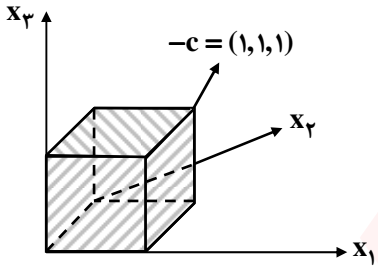
روش سوم – با رسم عمودهای بر محدودیت‌ها در نقاط رأسی، از آنجا که بردار **c** در مخروط حاصل از این عمودها در نقطه **C** قرار گرفته، این نقطه رأسی جواب بهینه مسأله را می‌دهد:



Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

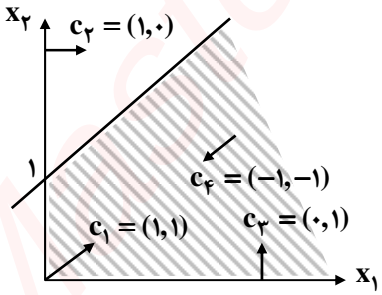
مثال ۱۰: فرض کنید که مجموعه شدنی مکعب واحد باشد، که با قیدهای $0 \le x_i \le 1 \ , \ i = 1,2,3$ تعریف می‌شود، در این مسأله می‌نیمم‌سازی $c = (-1,-1,-1)$، در این صورت، بردار $x = (1,1,1)$ یک جواب بهینه است. به علاوه جواب بهینه در یک گوشه مجموعه شدنی قرار دارد.



مثال ۱۱: مجموعه شدنی تعریف شده با قیدهای

$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

را در نظر بگیرید،



برای هر یک از بردار گرادیان‌های داده شده، جواب بهینه مسأله می‌نیمم‌سازی را معین کنید.

حل: ۱- برای بردار هزینه، $c_1 = (1,1)$، واضح است که $x = (0,0)$ جواب بهینه منحصر بفرد است.

۲- برای بردار هزینه، $c_2 = (1,0)$، جوابهای بهینه و دگرین (چندگانه) وجود دارد، زیرا هر بردار $x = (0,x_2)$ با $0 \le x_2 \le 1$، بهینه است. توجه داریم که مجموعه جوابهای بهینه کراندار است.

۳- برای بردار هزینه $c_3 = (0,1)$، جوابهای بهینه دگرین (چندگانه) وجود دارد. چون هر بردار $x = (x_1,0)$ با $x_1 \ge 0$، بهینه است، در این حالت، مجموعه جوابهای بهینه بی‌کران است.

۴- بردار هزینه $c_4 = (-1,-1)$، هیچ جواب شدنی بهینه نمی‌باشد، در این حالت گوییم هزینه بهینه $-\infty$ است.

در این مثال اگر قید $x_1 + x_2 \le -2$ را به مسأله اضافه کنیم، آنگاه واضح است که هیچ جواب شدنی وجود نخواهد داشت، همین‌طور که در این مثال مشاهده می‌کنید حالات خاصی در حل هندسی وجود دارد که در ادامه آنها را به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم.

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

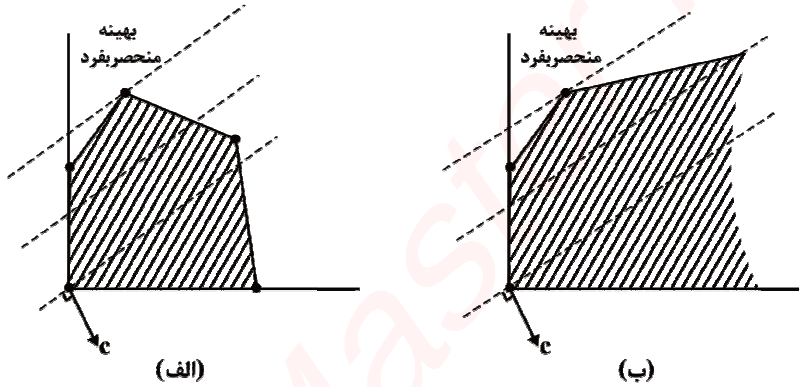
۱-۲-۷- حالات خاص حل هندسی

مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq ۰ \end{aligned}$$

نتیجه استفاده از روش حل هندسی یکی از چهار حالت زیر خواهد بود:

۱- **جواب بهینه‌ی متناهی منحصر به فرد،** اگر جواب بهینه‌ی متناهی منحصر به فرد باشد، آن وقت در یک نقطه‌ی رأسی واقع می‌شود. در شکل زیر، (الف) ناحیه‌ی شدنی کران‌دار است یعنی یک گوی در اطراف مبدأ وجود دارد که شامل ناحیه شدنی باشد و شکل (ب) نیز دارای ناحیه شدنی بی‌کران هست ولی در هر دو شکل جواب بهینه منحصربفرد داریم.



جواب‌های بهینه متناهی منحصر به‌فرد: (الف) ناحیه کران‌دار (ب) ناحیه بی‌کران.

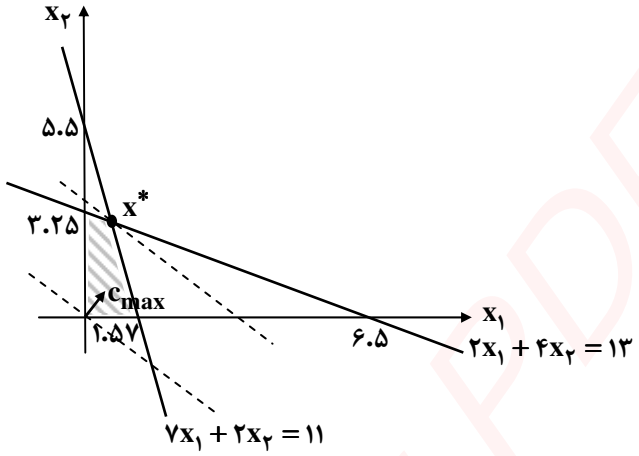
در این حالت فقط یک نقطه بهینه داریم که آن هم نقطه بهینه رأسی است. توجه دارید که با توجه اشکال بالا در جواب بهینه منحصر بفرد، ناحیه شدنی مسأله می‌تواند کراندار یا بی‌کران باشد.

مثال ۱۲: جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = ۷x_۱ + ۵x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & ۲x_۱ + ۴x_۲ \leq ۱۳ \\ & ۷x_۱ + ۲x_۲ \leq ۱۱ \\ & x_۱, x_۲ \geq ۰ \end{aligned}$$

OR12_ir OR12.ir

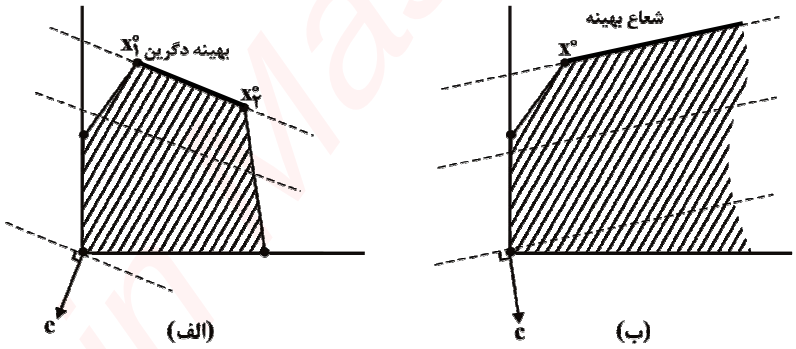
حل: با رسم ناحیه شدنی، داریم:



بنابراین مسأله داده شده جواب بهینه منحصربفرد دارد.

۲- **جواب‌های بهینه‌ی متناهی چندگانه (دگرین)**، دو حالت بوجود می‌آید:

حالت ۱: دو نقطه گوشه‌ای بهینه و بی‌نهایت نقطه‌ای بهین غیرگوشه‌ای داریم، در این حالت فضای جواب می‌تواند کراندار یا بی‌کران باشد. در شکل زیر (الف) دو نقطه گوشه‌ی x_1° و x_2° مانند هر نقطه‌ی پاره‌خطی که آن‌ها را به هم وصل می‌کنند، بهینه هستند.



جواب‌های بهینه متناهی دگرین: (الف) ناحیه کراندار. (ب) ناحیه بی‌کران.

حالت ۲: یک نقطه گوشه‌ای بهینه و بی‌نهایت نقطه‌ای بهین غیرگوشه‌ای داریم، در این حالت فضای حل حتماً بی‌کران است. هر نقطه‌ی روی شعاع به رأس x° در شکل بالا (ب) بهینه است (در این حالت گوئیم شعاع بهینه داریم). بنابراین مجموعه‌ی جواب‌های بهینه نامتناهی است.

با توجه به بحث جواب بهینه چندگانه می‌توان گفت که اگر یک مسأله برنامه‌ریزی خطی بیش از یک نقطه بهینه داشته باشد، در این صورت دارای بی نهایت نقطه بهینه خواهد بود.

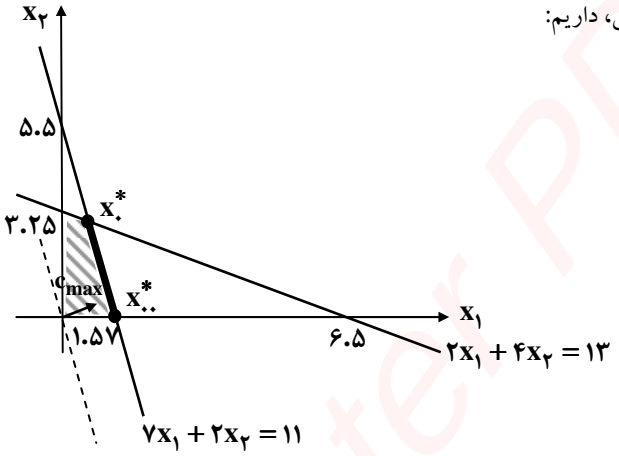
OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

مثال ۱۳: جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= ۳.۵x_۱ + x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & ۲x_۱ + ۴x_۲ \le ۱۳ \\ & ۷x_۱ + ۲x_۲ \le ۱۱ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

حل: با رسم ناحیه شدنی، داریم:

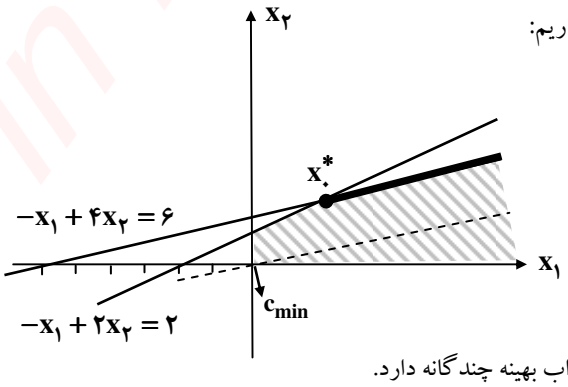


بدیهی است مسأله داده شده جواب بهینه چندگانه دارد.

مثال ۱۴: جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \frac{۱}{۲}x_۱ - ۲x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & -x_۱ + ۲x_۲ \le ۲ \\ & -x_۱ + ۴x_۲ \le ۶ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

حل: با رسم ناحیه شدنی، داریم:



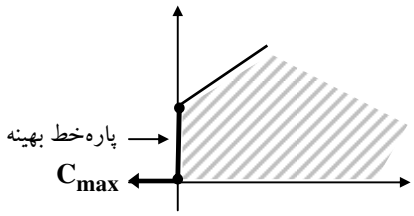
بنابراین مسأله داده شده جواب بهینه چندگانه دارد.

Created in Master PDF Editor

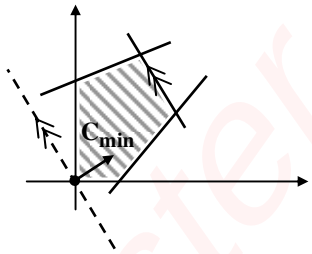
مثال ۱۵: صحیح یا غلط بودن عبارات زیر را مشخص کنید:

الف) اگر شعاع بهینه داشته باشیم، حتماً ناحیه شدنی بی‌کران است؟ درست است.

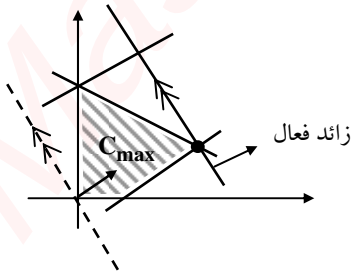
ب) اگر پاره‌خط بهینه داشته باشیم قطعاً ناحیه شدنی کران‌دار است؟ غلط است. به مثال نقض زیر توجه کنید:



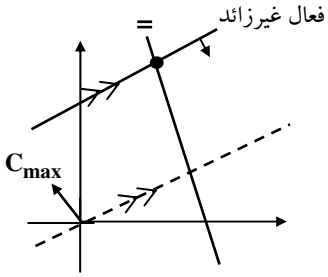
پ) اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیتهای مسأله باشد، جواب بهینه چندگانه داریم؟ غلط است، به مثال نقض زیر توجه کنید که در آن جواب بهینه مبدأ مختصات است.

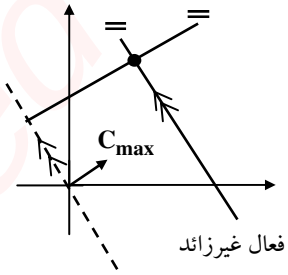


ت) اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیتهای فعال در نقطه بهینه باشد، جواب بهینه چندگانه داریم؟ غلط است، به مثال نقض زیر توجه کنید:



ث) اگر تابع هدف موازی یکی از محدودیتهای فعال غیر زائد در نقطه بهینه باشد جواب بهینه چندگانه داریم؟ غلط است، به مثالهای نقض زیر توجه کنید.



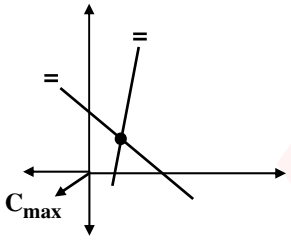


Created in Master PDF Editor

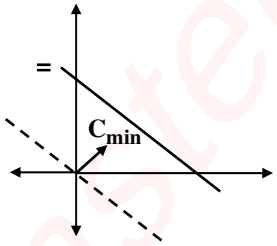
ج) اگر جواب بهینه چندگانه داشته باشیم، حتماً تابع هدف موازی یکی از محدودیتهای مسأله بوده است؟ غلط است، زیرا موازی بودن تابع هدف با یکی از محدودیتها تنها در فضای دوبعدی شرط لازم است و در فضاهای بالاتر، حتی شرط لازم هم نیست.

در انتها بعضی حالاتی که با تغییر تابع هدف **max** به **min** جواب بهینه مسأله تغییر نمی‌کند را بررسی می‌کنیم:

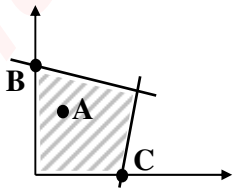
I) زمانی که ناحیه شدنی، یک نقطه باشد:



II) ممکن است ناحیه شدنی، یک خط، یک نیم خط، یک پاره‌خط و یا صفحه .... باشد:



III) $C=0$: در این شرایط کل ناحیه شدنی بهینه است و این تنها حالتی است که یک نقطه درونی مثل **A** بهینه است.



در این حالت در فضای دوبعدی در صورت وجود نقاط گوشه‌ای شدنی غیرمجاور مانند **B** و **C**، دو نقطه رأسی بهینه غیرمجاور داریم. توجه داشته باشید، ممکن است نقاط رأسی بهینه غیرمجاور داشته باشیم ولی $C=0$ نباشد.

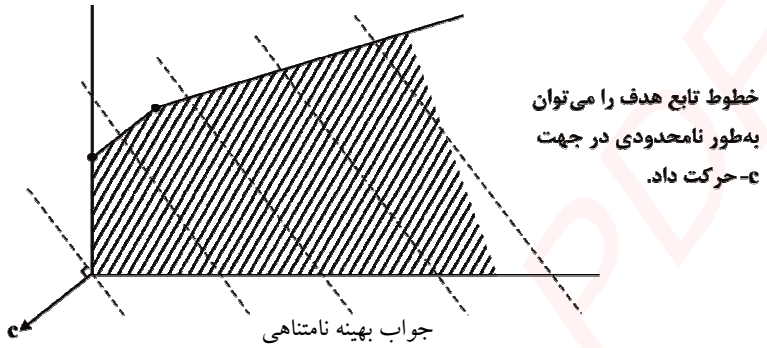
$$C=0 \not\Rightarrow \text{نقاط رأسی غیرمجاور بهینه}$$

$$\text{رأس‌های غیرمجاور بهینه داریم} \Rightarrow C=0 \quad , \quad \text{نقاط رأسی غیرمجاور داشته باشیم}$$

۳- **جواب بهینه نامتناهی**، این حالت در شکل زیر نشان داده شده است که در آن ناحیه‌ی شدنی بیکران و مقدار جواب بهینه نامتناهی است. برای یک مسأله می‌نیمم سازی صفحه $cx=z$ را می‌توان در جهت $-c$ به طور نامعین

OR12_ir OR12.ir

حرکت داد به طوری که همیشه ناحیه‌ی شدنی را قطع کند. در این حالت تابع هدف بهینه نامتناهی با مقدار $-\infty$ است و هیچ جواب بهینه‌ای موجود نیست.

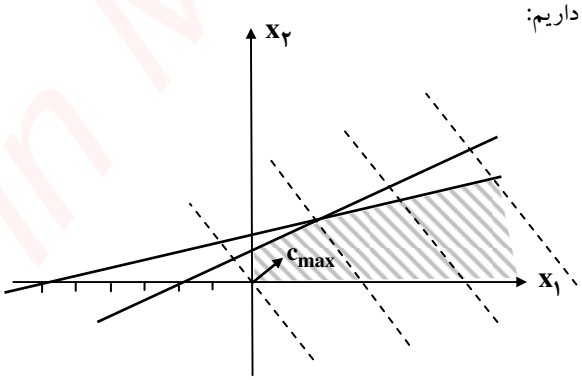


در عمل اگر مسأله جواب بهینه بیکران داشته باشد، حتماً مدلسازی مسأله نادرست انجام شده است. شرط لازم جواب بهینه نامتناهی، بی‌کران بودن ناحیه شدنی است ولی بوضوح این شرط کافی نیست زیرا بستگی به بردار گرادیان تابع هدف دارد. توجه داشته باشید در جواب بهینه نامتناهی هیچ نقطه‌ی بهینه‌ای نداریم.

مثال ۱۶: جواب بهینه مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را بیابید.

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z = ۴x_۱ + ۴x_۲ \\ \text{s.t.} \quad & -x_۱ + ۲x_۲ \le ۲ \\ & -x_۱ + ۴x_۲ \le ۶ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned}$$

حل: با رسم ناحیه شدنی، داریم:



بنابراین $z^* \to +\infty$ و مسأله جواب بهینه‌ای ندارد.

OR12_ir OR12.ir

نکته: اگر $S \neq \phi$ مجموعه جوابهای شدنی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با محدودیتهای:

$$\begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\geq ۰ \end{aligned}$$

در صورتی که ضریب متغیر x_j در تمامی محدودیتها، نامنفی باشد، فضای شدنی در جهت آن متغیر بی‌کران است و اگر محدودیتها بصورت:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq ۰ \end{aligned}$$

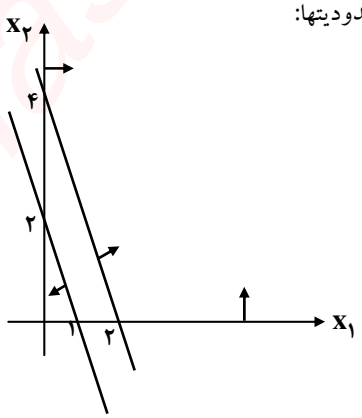
باشد، در صورتی که ضریب متغیر x_j در تمامی محدودیتها، نامثبت باشد، فضای شدنی در جهت آن متغیر بی‌کران است.

۴- **ناحیه شدنی تهی**، در این حالت سیستم معادلات و یا نامعادلات که ناحیه شدنی را تشکیل می‌دهند اشتراکی ندارند. این مسأله را نشدنی، ناسازگار، یا با ناحیه شدنی تهی می‌گویند.

مثال ۱۷: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= ۵x_۱ - ۳x_۲ \\ ۲x_۱ + x_۲ &\leq ۲ \\ ۴x_۱ + ۲x_۲ &\geq ۸ \\ x_۱, x_۲ &\geq ۰ \end{aligned}$$

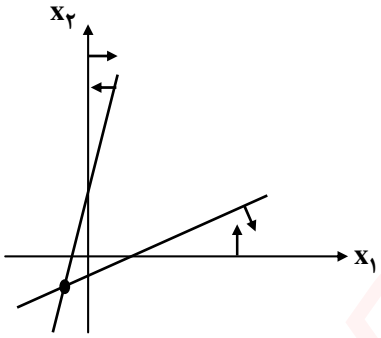
با توجه به ناحیه موجه محدودیتها:



ملاحظه می‌شود که نامعادلات با یکدیگر ناسازگار[1] بوده و هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که شرایط دو نامعادله را دارا باشد. ممکن است در یک مسأله نامعادلات با یکدیگر سازگار باشند اما باز هم مسأله دارای ناحیه موجه نیست. به شکل زیر توجه کنید:

1. Incompatibility

OR12_ir OR12.ir



با توجه به مطالب بیان شده ممکن است یکی از موارد زیر اتفاق افتد:

الف) یک جواب بهینه منحصربفرد وجود دارد.

ب) جوابهای بهینه چندگانه (دگرین) وجود دارد، در این حالت، مجموعه جوابهای بهینه ممکن است کراندار یا بیکران باشد.

پ) هزینه بهینه $-\infty$ است و هیچ جواب شدنی بهینه نمی‌باشد.

ت) مجموعه شدنی تهی است.

در واقع، یک حالت دیگر نیز وجود دارد: جواب بهینه وجود ندارد هر چند که مسأله شدنی است و هزینه بهینه $-\infty$ نمی‌باشد، به عنوان مثالی برای این حالت، مسأله می‌نیمم‌سازی $\frac{1}{x}$ در رابطه با $x > 0$ را در نظر بگیرید (به ازای هر جواب شدنی، جواب دیگری با هزینه کوچکتر وجود دارد، ولی هزینه بهینه $-\infty$ نیست).

۱-۲-۸- فضای احتیاج[1]

۱. فضای احتیاج و محدودیت‌های مساوی

مسأله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان به طور هندسی در فضای دیگری که معمولاً فضای احتیاج گفته می‌شود حل و تفسیر کرد. مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1, \quad x_2, \ \dots, \quad x_n \geq 0
\end{aligned}
\qquad
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هر ستون ماتریس ضرایب را یک بردار درنظر بگیرید بدین صورت با تعریف بردارهای a_j به عنوان ستون j ام ماتریس A مسأله را به فرم زیر می‌توان نوشت:

1. Requirement space

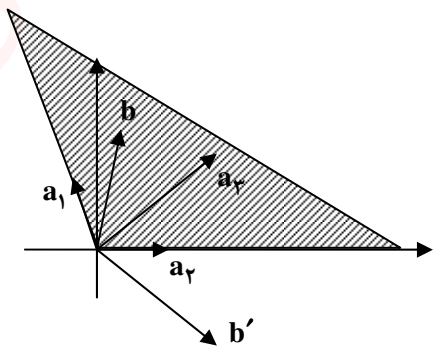
OR12_ir OR12.ir

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$$
$$x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\dots,n$$

بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ مفروض است می‌خواهیم اسکالرهای نامنفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ را طوری پیدا کنیم که $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ و $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ می‌نیمم شود. تعریف ترکیب خطی نامنفی بردارها را در فصل آینده بررسی خواهیم کرد، در حال حاضر تنها لازم است بدانیم مجموعه‌ی بردارهای به شکل $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$ که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n = 0$ مخروطی است که توسط بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ به وجود آمده است بنابراین مسأله جواب شدنی دارد، **اگر و فقط اگر** بردار b در این مخروط قرار بگیرد. چون بردار b معمولاً احتیاجات را تداعی می کند که باید تأمین شود، معمولاً به شکل مثال بعد فضای احتیاج گفته می‌شود.

مثال ۱۸: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید، با توجه به $a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = b_1 \\ & 2x_1 + \qquad 4x_3 = b_2 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$



واضح است به ازای $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ مسأله شدنی بوده و به ازای $b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{pmatrix}$ مسأله نشدنی خواهد بود.

۲. فضای احتیاج و محدودیت‌های نامساوی

سیستم نامساوی زیر را در نظر بگیرید:

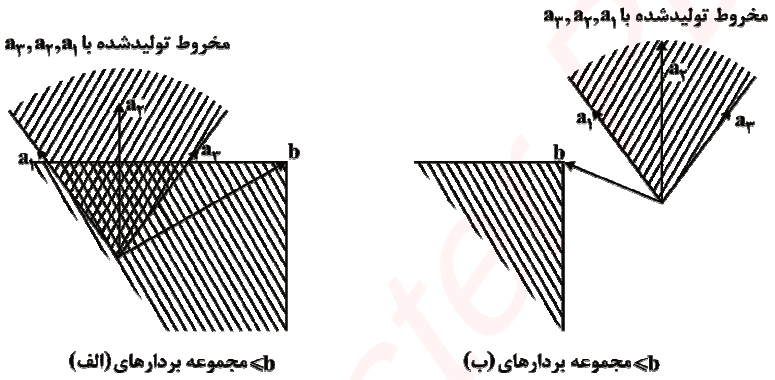
Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,\dots,n$$

می‌دانیم مجموعه‌ی بردارهای $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$، که در آن $x_j \ge 0$ به ازای $j = 1,2,\dots,n$، مخروطی است که توسط $a_1, a_2, \dots, a_n$ تشکیل شده است. اگر جواب شدنی موجود باشد، آنگاه این مخروط باید مجموعه بردارهایی که کمتر یا مساوی بردار احتیاج b است را قطع کند.



فضای احتیاج و محدودیت‌های نامساوی: (الف) سیستم شدنی است. (ب) سیستم نشدنی است.

همچنین برای $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \ge b;\ x_j \ge 0, j = 1,2,\dots,n$، اگر جواب شدنی موجود باشد، آنگاه مخروط حاصل باید مجموعه بردارهایی که بزرگتر مساوی بردار b است را قطع کند.

۳. فضای احتیاج و بهینگی

دیدیم که سیستم $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$ و $x_j \ge 0$ به ازای $j = 1,2,\dots,n$ شدنی است اگر و فقط اگر b در مخروط به وجود آمده با بردارهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ قرار گیرد. متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ باید طوری انتخاب شوند تا شرط شدنی برقرار شود و $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ به حداقل برسد. بنابراین مسأله برنامه‌ریزی خطی را می‌توان چنین نشان داد، مقدار متغیرهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ را طوری پیدا کنید که:

OR12_ir OR12.ir

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ a_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} c_2 \\ a_2 \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} c_n \\ a_n \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$$

که در آن تابع هدف z باید به حداقل برسد. به عبارت دیگر می‌خواهیم نشان دهیم که بردار $\begin{bmatrix} z \\ b \end{bmatrix}$، به ازای کوچک‌ترین مقدار z، در مخروط تولید شده با بردارهای $\begin{bmatrix} c_1 \\ a_1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} c_2 \\ a_2 \end{bmatrix}$، ...، $\begin{bmatrix} c_n \\ a_n \end{bmatrix}$ قرار دارد، توجه دارید که افزایش بعد مسأله از m به $m+1$ جریمه‌ای است که باید به ازای ضمیمه کردن تابع هدف به فضای احتیاج بپردازیم.

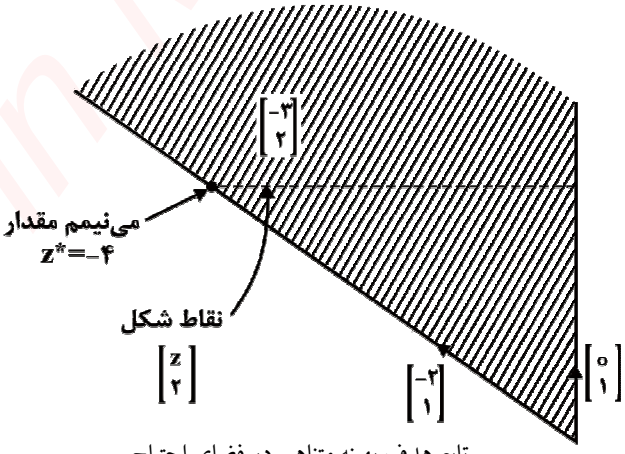
مثال ۱۹: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

ابتدا مسأله را به فرم استاندارد تبدیل می‌کنیم و متغیر کمکی $x_3 \ge 0$ را اضافه می‌کنیم، پس مسأله انتخاب متغیرهای $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ است به طوری که:

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix}$$

که در آن z باید می‌نیمم شود. مخروط تولید شده با بردارهای $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ در شکل زیر نشان داده شده است. می‌خواهیم بردار $\begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix}$ را در این مخروط با مقدار می‌نیمم z انتخاب کنیم. این منجر به جواب بهینه $z^* = -4$ با $x_1^* = 2$ (مضرب نظیر به نظیر بردار $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$) و $x_2^* = x_3^* = 0$ می‌شود.



تابع هدف بهینه متناهی در فضای احتیاج

Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

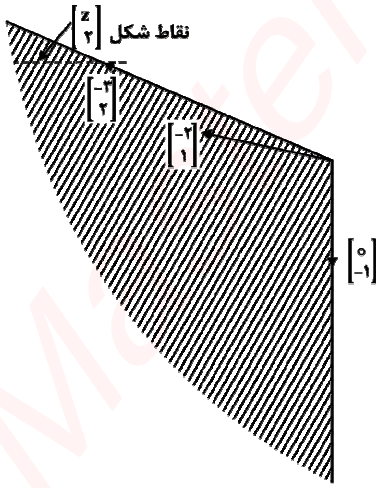
مثال ۲۰: مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار جواب بهینه به وضوح نامتناهی است. این مطلب را در فضای احتیاج سشرح می‌دهیم. با کم کردن متغیر کمکی $x_3 \geq 0$ مسأله چنین بیان می‌شود. متغیرهای $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ را طوری پیدا کنید که

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix}$$

به طریقی که z می‌نیمم شود. مخروط تولید شده توسط بردارهای $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ در شکل زیر نشان داده شده است.



تابع هدف بهینه نامتناهی در فضای احتیاج

می‌خواهیم $\begin{bmatrix} z \\ 2 \end{bmatrix}$ را در این مخروط با کوچک‌ترین مقدار ممکن z پیدا کنیم. بنابراین مقدار جواب بهینه $-\infty$ یا نامتناهی است.

۱-۳- مدل‌بندی مثالهای برنامه‌ریزی‌خطی

مدل‌بندی و تحلیل یک مسأله تحقیق در عملیات به طور اعم، و مسأله برنامه‌ریزی خطی بطور اخص در چند مرحله انجام می‌شود.

OR12_ir OR12.ir

مرحله اول: تعریف مسأله

فرمول‌بندی شامل مطالعه تفضیلی سیستم، مجموعه داده‌ها و شناسایی مشخصه مسأله‌ای است که باید تحلیل کرد، همراه با محدودیتهای اصلی و محدودیتهای ضمنی یا حدود و تابع (توابع) هدف است. اغلب مسأله تحت بررسی می‌تواند تنها بخشی از مسأله کل سیستم باشد.

مرحله دوم: ساخت مدل

باید دقت کرد که این مدل، سیستم تحت بررسی را به طور کامل ارائه دهد، در عین حال آن را به طور ریاضی کنترل کند. این بررسی باید با دقت انجام گیرد و فرض‌های ذاتی در مدل به درستی دیده شود. باید به خاطر داشت که از این به بعد جوابهای حاصل، جوابهای مدل هستند نه لزوماً جوابهای سیستم واقعی مگر این که این مدل به درستی وضعیت درست سیستم را ارائه دهد.

مرحله سوم: به دست آوردن جواب بهینه

روش مناسبی باید برگزید یا طراحی کرد تا از هر ساختار ویژه‌ای (در صورت وجود) بهره جوید. یک جواب بهینه یا بیشتر را می‌توان جستجو کرد، یا فقط یک انتزاعی یا یک جواب تقریبی را می‌توان همراه با ارزیابی کیفی آن مشخص کرد.

مرحله چهارم: آزمون مدل

این مرحله شامل، آنالیز و (احتمالاً) بازسازی است. جواب مدل و حساسیت آن به پارامترهای متفاوت سیستم آزمایش می‌شود، و درستی پیش‌بینی‌هایشان را از ابعاد مختلف بررسی می‌کند. این آنالیز به داخل سیستم نظر می‌افکند. همچنین از این آنالیز می‌توان استفاده کرد و اعتبار مدل را با مقایسه نتایج پیش‌بینی شده با نتایج مورد انتظار ما با استفاده از تجارب گذشته یا انجام آزمون با استفاده از داده‌های تاریخی بررسی کرد. در این مرحله مدل را با یکی کردن مشخصه‌های مهم سیستم که هنوز مدل‌بندی نشده‌اند، تقویت می‌کنند، یا به عبارت دیگر، ساده کردن مدل مد نظر قرار می‌گیرد.

مرحله پنجم: اجرا

مدل با کمک مراحل تصمیم‌گیری ساخته می‌شود. مدل هرگز نباید جایگزین تصمیم‌گیرنده شود. اغلب قبل از اتخاذ هر خط‌مشی تصمیم‌گیری نیاز به یک «معیار» داریم که اساس قضاوت و تجربه باشد و به واسطهٔ آن جواب مدل امتحان شود. در ادامه چند مسأله را که به صورت برنامه‌های خطی فرمول‌بندی می‌شود، توضیح می‌دهیم.

برنامه‌ریزی تولید[1]

مثال ۲۱: سه محصول با انجام سه فعالیت مختلف پردازش می‌شوند. زمان‌های مورد نیاز برای هر واحد از هر محصول به شرح زیر می‌باشد.

1. Production planning

OR12_ir OR12.ir

فعالیت	زمان برای هر واحد(دقیقه)			ظرفیت روزانه
	محصول ۱	محصول ۲	محصول ۳	
۱	۱	۲	۱	۴۳۰
۲	۳	۰	۲	۴۶۰
۳	۱	۴	۰	۴۲۰
	۳	۲	۵	سود هر واحد (تومان)

فرض بر این است که تمام واحدهای تولید شده فروخته می‌شود. هدف مدل، تعیین تولید بهینه روزانه سه محصول است به گونه‌ای که سود کل بیشینه شود.

حل: فرض می‌کنیم x_j تعداد واحدی از محصول **j**ام باشد که باید روزانه تولید شود. $(j=1,2,3)$، سود کل حاصل از تولید x_1 واحد از محصول ۱، x_2 واحد از محصول ۲ و x_3 واحد از محصول ۳ برابر است با $3x_1+2x_2+5x_3$، بنابراین هدف مسأله عبارتست از بیشینه‌سازی $z=3x_1+2x_2+5x_3$.

قیود یا محدودیت‌های مسأله باید تضمین کند که زمان کل مورد نیاز برای پردازش تمام واحدهای تولید شده، از ظرفیت روزانه تجاوز نکند. بنابراین:

$$x_1+2x_2+x_3 \le 430$$
$$3x_1 \quad +2x_3 \le 460$$
$$x_1+4x_2 \quad \le 420$$

چون تعداد کالا نمی‌تواند منفی باشد، قیود نامنفی بودن نیز به قیود فوق اضافه می‌شوند. بنابراین برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z=3x_1+2x_2+5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+2x_2+x_3 \le 430 \\ & 3x_1 \quad +2x_3 \le 460 \\ & x_1+4x_2 \quad \le 420 \\ & x_1,x_2,x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

موازنه خط مونتاژ کارخانه

مثال ۲۲: یک واحد کامل محصولی از چهار واحد از قطعه **A** و سه واحد از قطعه **B** تشکیل می‌شود. هر کدام از این قطعات از دو ماده خام مختلف که از آنها به ترتیب ۱۰۰و۲۰۰ واحد موجود است، ساخته می‌شود. سه بخش امر تولید را به عهده دارند و هر بخش برای ساختن قطعات مزبور از یک روش مختص به خود استفاده می‌کند. جدول زیر احتیاجات مواد خام برای هر دور تولید و میزان تولیدات در هر بخش است به گونه‌ای که تعداد کل واحدهای کامل محصول نهایی بیشینه می‌شود.

OR12_ir OR12.ir

بخش	موادخام مصرف شده در هر دور(واحد)		بازده در هر دور (واحد)	
	ماده خام ۱	ماده خام ۲	قطعه A	قطعه B
۱	۸	۶	۷	۵
۲	۵	۹	۶	۹
۳	۳	۸	۸	۴

حل: فرض کنیم x_j میزان تولیدات در بخش j ام باشد $(j=۱,۲,۳)$ ،داریم:

تعداد کل واحدهای قطعه A که در سه بخش تولید می‌شود برابر است با: $۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳$

تعداد کل واحدهای قطعه B که در سه بخش تولید می‌شود برابر است با: $۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳$

هر واحد محصول نهایی از چهار واحد قطعه A و سه واحد قطعه B تشکیل می شود. بنابراین تعداد کل واحدهای محصول نهایی برابر است با $\text{Min}\left\{\frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴}\ ,\ \frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳}\right\}$. هدف بیشینه سازی تعداد کل واحدهای محصول نهایی است. بنابراین تابع هدف مسأله به صورت زیر است:

$$\text{Max}(\text{Min}\left\{\frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴}\ ,\ \frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳}\right\})$$

محدودیت‌های مربوط به مواد خام به صورت زیر می باشد:

$۸x_۱+۵x_۲+۳x_۳ \le ۱۰۰$ ماده خام (۱)

$۶x_۱+۹x_۲+۸x_۳ \le ۲۰۰$ ماده خام (۲)

تابع هدف مسأله خطی نمی‌باشد.برای خطی کردن آن قرار می دهیم.

$$y=\text{Min}\left\{\frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴}\ ,\ \frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳}\right\}$$

خواهیم داشت:

$$y \le \frac{۷x_۱+۶x_۲+۸x_۳}{۴}$$

$$y \le \frac{۵x_۱+۹x_۲+۴x_۳}{۳}$$

لذا مسأله به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

$$\max z = y$$
$$\text{s.t.}\quad 7x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 4y \geq 0$$
$$5x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 3y \geq 0$$
$$8x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 100$$
$$6x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 200$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مثال ۲۳: یک کارخانه تولید ماشین، ۵ ماشین رنگ‌کاری و یک ماشین پرس دارد، که این ماشین برای ساختن دو نوع محصول **A** و **B** به کار برده می‌شوند. با ترکیب یک واحد از **A** و یک واحد از **B** یک محصول جدید بدست می‌آید که محصول **C** نام دارد. بهره‌دهی هر کدام از ماشین‌ها برای محصول‌های **A** و **B** در جدول زیر داده شده است:

مدت زمان تولید در دقیقه برای هر واحد		
محصول	پرس	رنگ‌کاری
A	۳	۲۰
B	۵	۱۵

صاحب کارخانه می‌خواهد توازنی روی بار ماشین‌ها داشته باشد بدین صورت که هیچ‌کدام از ماشین‌ها در روز نیم ساعت بیش از دیگر ماشین‌ها کار نکرده باشد. (فرض بر این است که کار انجام شده در ماشین پرس بطور یکنواخت به ماشین‌های دیگر برای رنگ‌کاری داده می‌شود). کار را روی ماشین‌ها به طریقی تقسیم نمائید که در مدت ۸ ساعت کار، تعداد محصولات **C** حداکثر گردد.

حل: فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب تعداد محصول‌های **A** و **B** باشد، هر کدام از ماشین‌های رنگ‌کاری عبارتست از:

$$\frac{20x_1 + 15x_2}{5} = 4x_1 + 3x_2 \text{ (دقیقه)}$$

و کار ماشین پرس $3x_1 + 5x_2$ دقیقه خواهد بود. با توجه به محدودیت زمانی روی ماشین‌های رنگ‌کاری قید زیر را داریم:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 8(60) = 480$$

عیناً قید برای ماشین پرس به صورت $3x_1 + 5x_2 \leq 480$ خواهد بود. توازن مدت کارکرد ماشین‌ها قید زیر را نتیجه می‌دهد:

$$|(4x_1 + 3x_2) - (3x_1 + 5x_2)| \leq 30$$

یا

$$|x_1 - 2x_2| \leq 30$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

و این قید غیرخطی می‌باشد که می‌توان به جای این قید، دو قید خطی ذیل را جایگزین نمود:

$$x_۱ - ۲x_۲ \le ۳۰$$
$$-x_۱ + ۲x_۲ \le ۳۰$$

تعداد محصولات C از $Min(x_۱,x_۲)$ نمی‌تواند تجاوز نماید. بنابراین تابع مقصود که عبارت از $Z = min(x_۱,x_۲)$ می‌باشد یک تابع غیرخطی است. با قرار دادن $y = min(x_۱,x_۲)$ و با افزودن دو قید:

$$x_۱ \ge y$$
$$x_۲ \ge y$$

مسأله بدین صورت درمی‌آید:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & Z = y \\
\text{s.t.} \quad & ۴x_۱ + ۳x_۲ \le ۴۸۰ \\
& ۳x_۱ + ۵x_۲ \le ۴۸۰ \\
& x_۱ - ۲x_۲ \le ۳۰ \\
& -x_۱ + ۲x_۲ \le ۳۰ \\
& x_۱ - y \ge ۰ \\
& x_۲ - y \ge ۰ \\
& x_۱, x_۲, y \ge ۰
\end{aligned}$$

OR12_ir OR12.ir

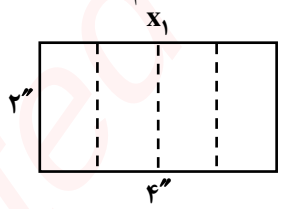
مسأله برش چوب

مثال ۲۴: یک شرکت چوب‌بری باید سفارش‌هایی را به ابعاد زیر تهیه و به متقاضیان تسلیم نماید.

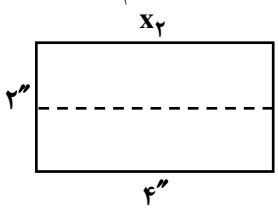
مقدار سفارش	ابعاد چوبهای سفارشی
۱۳۰۰	۱″×۲″×۱۱′
۱۰۰۰	۱″×۴″×۱۱′
۷۰۰	۲″×۲″×۱۱′

این سفارشات باید از تخته‌های استاندارد به ابعاد ۲″×۴″×۱۱′ تهیه گردد. برش استاندارد در تهیه سفارشات به پنج طریق زیر ممکن است:

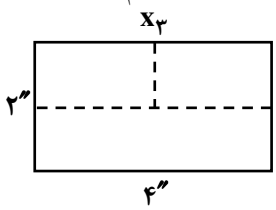
(طریق یکم برش)



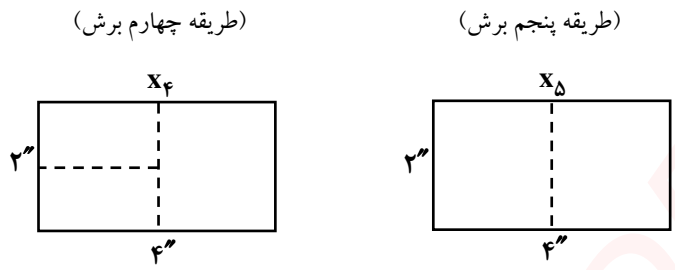
(طریقه دوم برش)



(طریقه سوم برش)



Created in Master PDF Editor



شرکت مذکور در نظر دارد می‌نیمم تخته استاندارد لازم را جهت تهیه سفارشات بکار برد. یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای آن ارائه دهید؟

حل: چنانچه x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 عبارت باشند از تعداد تخته‌های استاندارد که به ترتیب برطبق یکی از پنج طریق ممکن برش داده شده باشند، تابع هدف مسأله عبارتست از:

$$\text{Min} \quad Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

با توجه به آنکه در برش نوع یکم چهار تخته به ابعاد $1'' \times 2'' \times 11'$ نتیجه می‌شود و همچنین در برش نوع سوم و نوع چهارم به ترتیب دو تخته به ابعاد مذکور بدست می‌آید، خواهیم داشت:

$$4x_1 + 2x_3 + 2x_4 \geq 1300$$

به طور مشابه نامعادلات مربوط به دو نوع سفارش دیگر به قرار زیر می‌باشند:

$$2x_2 + x_3 \geq 1000 \qquad (\text{برای ابعاد } 1'' \times 4'' \times 11')$$

$$x_4 + 2x_5 \geq 700 \qquad (\text{برای ابعاد } 2'' \times 2'' \times 11')$$

با اضافه کردن شرایط غیرمنفی بودن متغیرها، مدل مسأله فوق به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
4x_1 + 2x_3 + 2x_4 &\geq 1300 \\
2x_2 + x_3 &\geq 1000 \\
x_4 + 2x_5 &\geq 700 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

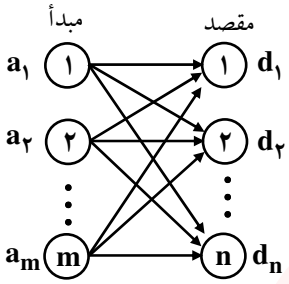
مسأله حمل و نقل

مثال ۲۵: فرض کنید m عرضه‌کننده کالا داریم که به ترتیب هرکدام عرضه‌های $a_1, a_2, \ldots, a_m$ دارند، این m محل تولید کالاهای خود را به n متقاضی که به ترتیب هرکدام دارای تقاضای $d_1, d_2, \ldots, d_n$ هستند، ارسال می‌کنند. در ارتباط با انتقال هر واحد تولید از مبدأ i به مقصد j هزینه‌ای به اندازهٔ c_{ij} در نظر گرفته می‌شود. این صورت مسأله نوع ابتدایی یک مسأله حمل و نقل است و در آن، هدف، توزیع بهینهٔ کالای عرضه‌شده بین مقاصد تقاضا است به صورتی که میزان کل هزینه حمل و نقل حداقل شود، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای این مسأله ارائه دهید.

OR12_ir OR12.ir

حل: x_{ij} را میزان کالای ارسالی از مبدأ i به مقصد j در نظر بگیرید، هدف حداقل کردن هزینه ارسال کالاست، بنابراین تابع هدف بصورت زیر است:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$



m محدودیت عرضه و n محدودیت تقاضا بصورت زیر خواهند بود، برای مثال عرضه ۱، کالای خود را به مقاصد ۱ تا n ارسال می‌کند و تقاضای ۱، کالای خود را از عرضه‌کننده‌های ۱ تا m دریافت می‌کند:

$$\text{محدودیت عرضه } m \begin{cases} x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n}=a_2 \\ \vdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn}=a_m \end{cases}$$

$$\text{محدودیت تقاضا } n \begin{cases} x_{11}+x_{21}+\dots+x_{m1}=d_1 \\ x_{12}+x_{22}+\dots+x_{m2}=d_2 \\ \vdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\dots+x_{mn}=d_n \end{cases}$$

بنابراین مدل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \;\; ; \;\; i=1,\dots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \;\; ; \;\; j=1,\dots,n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

برای اینکه سیستم معادلات فوق دارای جواب باشد باید مجموع عرضه و تقاضا برابر باشند. یعنی:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

تربیت نیروی متخصص

مثال ۲۶: یک کمپانی سازنده اجزاء ماشین یک دوره تربیت کادر متخصص دایر نموده است. افراد تربیت شده می‌توانند به عنوان معلم به کار برده شوند تا متخصصین دیگری را تربیت کنند به نسبت یک به ده، یعنی هر فرد تربیت شده می‌تواند ده نفر دیگر را تربیت نماید. دوره آموزش یک ماه می‌باشد. نتایج تجارب گذشته نشان می‌دهد که از هر ده کارآموز فقط هفت نفر قادر هستند که با موفقیت از عهده امتحانات برآیند (و افرادی که مردود می‌شوند بیرون رانده می‌شوند). افراد موفق دوره گذارنده (متخصص) که مورد نیاز کمپانی برای اداره ماشین‌ها برای سه ماه آینده می‌باشند چنین هستند:

ماه ۱ : فروردین	۱۰۰ نفر
ماه ۲ : اردیبهشت	۱۵۰ نفر
ماه ۳ : خرداد	۲۰۰ نفر

به علاوه برای تیرماه کمپانی به ۲۵۰ متخصص نیاز دارد. تعداد متخصصین موجود در ابتدای کار ۱۳۰ نفر می‌باشد و دستمزد پرداختی از طرف کمپانی به شرح ذیل می‌باشد:

هر متخصص اعم از اینکه درس بدهد یا در کارخانه کار کند	$ ۷۰۰
هر کارآموز ضمن آموزش	$ ۴۰۰
هر متخصص بیکار	$ ۵۰۰

کمپانی، افراد متخصص را طبق قانون اتحادیه کارگری نمی‌تواند بیرون کند. یک مدل برنامه‌ریزی خطی طرح نمائید، به طوری که پرداختی از جانب کمپانی برای استخدام و تربیت متخصص حداقل و در عین حال خواسته کمپانی برآورده گردد.

حل: قبلاً یادآور می‌شویم که هر فرد متخصص می‌تواند یکی از کارهای ذیل را انجام دهد:

۱) در کارخانه روی ماشین‌ها کار کند.

۲) به کار معلمی برای تربیت متخصص به کار رود.

۳) بیکار باشد.

چون تعداد متخصصینی که روی ماشین‌ها کار می‌کنند ثابت می‌باشد در نتیجه تنها متغیرهای تصمیم مسأله عبارتند از: تعداد متخصصینی که در هر ماه به کار تعلیم مشغول هستند و تعداد متخصصینی که در هر ماه بیکار می‌باشند، بنابراین متغیرهایی که بایستی معین گردند عبارتند از:

$x_۱, x_۳, x_۵$: به ترتیب تعداد متخصصینی که در ماه ۱، ۲ و ۳ مشغول تعلیم هستند.

$x_۲, x_۴, x_۶$: به ترتیب تعداد متخصصینی که در ماه ۱، ۲ و ۳ بیکار هستند.

از قیود، لازم می‌آید که تعداد کافی از افراد متخصص برای هر ماه موجود باشد و این را می‌توان با نوشتن معادله زیر برای هر ماه برآورد کرد:

تعداد متخصصین موجود در ابتدای هر ماه = متخصصین مشغول کار روی ماشین‌ها + متخصصین مشغول تعلیم + متخصصین بیکار

OR12_ir OR12.ir

بنابراین برای فروردین ماه:

$$100 + x_1 + x_2 = 130$$

برای ماه اردیبهشت، تعداد متخصصین موجود عبارت خواهند بود از مجموع متخصصینی که از برنامه آموزش می‌آیند و متخصصین موجود در ماه فروردین. در فروردین ماه $10x_1$ کارآموز وجود دارد و از اینها $7x_1$ امتحانات را با موفقیت می‌گذرانند و به کادر متخصصین می‌پیوندند. بنابراین قید ماه اردیبهشت عبارت خواهد بود از:

$$150 + x_3 + x_4 = 130 + 7x_1$$

عیناً قید ماه خرداد عبارت خواهد بود از:

$$200 + x_5 + x_6 = 130 + 7x_1 + 7x_3$$

چون کمپانی ۲۵۰ متخصص برای ماه تیر نیاز دارد قید دیگری به صورت

$$130 + 7x_1 + 7x_3 + 7x_5 = 250$$

به تعداد قیود مسأله اضافه می‌گردد. البته لازم به یادآوری است که بایستی قیود دیگری به صورت $x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,6$ به مجموعه قیود اضافه نمود. در نوشتن تابع مقصود، ضرورتی ندارد که دستمزد متخصصینی که روی ماشین‌ها کار می‌کنند به حساب آورد زیرا اینها مقادیر ثابتی هستند، بنابراین تابع مقصود بصورت زیر خواهد بود:

$$\text{Min } Z = 400(10x_1 + 10x_3 + 10x_5) + 700(x_1 + x_3 + x_5) + 500(x_2 + x_4 + x_6)$$

بنابراین مسأله برنامه‌ریزی خطی بصورت ذیل است:

$$\text{Min } Z = 4700x_1 + 500x_2 + 4700x_3 + 500x_4 + 4700x_5 + 500x_6$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 = 30 \\
& 7x_1 - x_3 - x_4 = 20 \\
& 7x_1 + 7x_3 - x_5 - x_6 = 70 \\
& 7x_1 + 7x_3 + 7x_5 = 120 \\
& x_i \geq 0,\ i = 1,\dots,6
\end{aligned}$$

برنامه‌ریزی تبلیغات

مثال ۲۷: یک کمپانی تبلیغاتی در نظر دارد که یک مبارزه تبلیغاتی پیش گیرد. برای این منظور از سه طریق تلویزیون، رادیو، مجلات استفاده می‌نماید. مقصود از تبلیغات رسیدن به تعداد مشتریان ممکن است تا آنجایی که امکان دارد، نتیجه مطالعه بازار چنین داده شده است:

مجلات	رادیو	تلویزیون		شرح
$۱۵,۰۰۰	$۳۰,۰۰۰	$۷۵,۰۰۰	$۴۰,۰۰۰	قیمت یک واحد تبلیغ
۲۰۰,۰۰۰	۵۰۰,۰۰۰	۹۰۰,۰۰۰	۴۰۰,۰۰۰	تعداد مشتریان ممکن که در یک بار تبلیغات می‌رسیم
۱۰۰,۰۰۰	۲۰۰,۰۰۰	۴۰۰,۰۰۰	۳۰۰,۰۰۰	تعداد مشتریان زن که در یک دفعه تبلیغ می‌رسیم

توضیح: «دو ستون تلویزیون از چپ به راست به ترتیب تبلیغ در وقت روز و تبلیغ در بهترین وقت است.»

Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

کمپانی نمی‌خواهد بیش از $۸۰۰,۰۰۰ در این راه خرج نماید، به علاوه مطالب زیر نیز خواسته شده:

۱) حداقل دو میلیون مشتری زن داشته باشیم.

۲) حداکثر $۵۰۰,۰۰۰ در تلویزیون برای تبلیغ خرج شود.

۳) حداقل ۳ بار تبلیغ در وقت روز و ۲ بار تبلیغ در بهترین وقت در تلویزیون انجام گیرد.

۴) تعداد تبلیغات در رادیو و همچنین مجلات حداکثر ۱۰ بار و حداقل ۵ بار باشد.

حل: فرض کنیم $x_۱, x_۲, x_۳, x_۴$ به ترتیب تعداد دفعات تبلیغ در تلویزیون در وقت روز، در بهترین وقت، در رادیو و در مجلات باشد. تعداد مشتریان ممکن به هزار عبارت خواهد بود:

$$۴۰۰x_۱ + ۹۰۰x_۲ + ۵۰۰x_۳ + ۲۰۰x_۴$$

قید محدودیت در بودجه تبلیغ عبارت است از:

$$۴۰,۰۰۰x_۱ + ۷۵,۰۰۰x_۲ + ۳۰,۰۰۰x_۳ + ۱۵,۰۰۰x_۴ \le ۸۰۰,۰۰۰$$

و قید حداقل مشتریان زن:

$$۳۰۰,۰۰۰x_۱ + ۴۰۰,۰۰۰x_۲ + ۲۰,۰۰۰x_۳ + ۱۰۰,۰۰۰x_۴ \ge ۲,۰۰۰,۰۰۰$$

و قیود تبلیغ تلویزیونی عبارتست از:

$$۴۰,۰۰۰x_۱ + ۷۵,۰۰۰x_۲ \le ۵۰۰,۰۰۰$$
$$x_۱ \ge ۳$$
$$x_۲ \ge ۲$$

بنابراین مسأله به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}
\text{Max } Z &= ۴۰۰x_۱ + ۹۰۰x_۲ + ۵۰۰x_۳ + ۲۰۰x_۴ \\
\text{s.t.} \quad & ۴۰x_۱ + ۷۵x_۲ + ۳۰x_۳ + ۱۵x_۴ \le ۸۰۰ \\
& ۳۰x_۱ + ۴۰x_۲ + ۲۰x_۳ + ۱۰x_۴ \ge ۲۰۰ \\
& ۴۰x_۱ + ۷۵x_۲ \le ۵۰۰ \\
& x_۱ \ge ۳ \\
& x_۲ \ge ۲ \\
& x_۳ \ge ۵ \\
& x_۳ \le ۱۰ \\
& x_۴ \ge ۵ \\
& x_۴ \le ۱۰
\end{aligned}$$

بازرسی کالا

مثال ۲۸: یک کمپانی دو نوع بازرس کالا در اختیار دارد که به ترتیب آنها را بازرسین درجه یک و درجه دو می‌نامیم. کمپانی می‌خواهد حداقل ۱۸۰۰ واحد کالا را در مدت ۸ ساعت بازرسی نماید. بازرسان درجه یک ساعتی

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

۲۵ عدد از کالای مورد نظر را با دقت ۹۸٪ می‌توانند بررسی نمایند، در صورتی که بازرسان درجه دو ساعتی ۱۵ عدد کالا را با دقت ۹۵٪ بازرسی می‌نمایند.

دستمزد بازرسان درجه یک ساعتی ۴ $ و بازرسان درجه دو هر ساعت ۳ $ می‌باشد. اگر کالا ناقص و بدون کشف از زیردست بازرسان رد شود کمپانی ۲ $ جریمه می‌پردازد. کمپانی ۸ بازرس درجه یک و ۱۰ بازرس درجه دو در اختیار دارد. نظر کمپانی به کار گماردن بازرسان موجود است، به طوری که در عین برآورد نظر کمپانی که در بالا ذکر گردید هزینه بازرسی و جریمه پرداخت گردیده از طرف کمپانی حداقل گردد.

حل: فرض کنیم که x_1 و x_2 به ترتیب تعداد بازرسان درجه یک و درجه دو باشد که برای نیل به هدف به کار گمارده می‌شوند. چون تعداد بازرسان محدود است، لذا اولین قیود عبارتند از:

$$x_1 \le 8$$

$$x_2 \le 10$$

چون کمپانی می‌خواهد حداقل ۱۸۰۰ واحد کالا مورد بررسی قرار گیرد، از این‌رو قید دیگر چنین خواهد بود:

$$8(25)x_1 + 8(15)x_2 \ge 1800$$

یا

$$200x_1 + 120x_2 \ge 1800$$

برای بدست آوردن تابع مقصود باید در نظر داشت که کمپانی متحمل دو نوع هزینه می‌گردد که عبارتند از: دستمزد بازرسان و جریمه کالای ناقص رد شده که بر اثر بازرسی کشف نمی‌گردند. هزینه بازرسی درجه یک برای هر ساعت به دلار عبارت خواهد بود از:

$$4 + 2(25)(0.02) = 5$$

عیناً هزینه بازرسی بازرسان درجه دو برای هر ساعت کار به دلار عبارت خواهد بود از:

$$3 + 2(15)(0.05) = 4.5$$

از این‌رو مسأله مذکور به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 8(5x_1 + 4.5x_2) = 40x_1 + 36x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \le 8 \\ & x_2 \le 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 \ge 45 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

مسائل سرمایه‌گذاری

مثال ۲۹: فردی روز دوشنبه ۱۰۰ دلار پول دارد. این فرد می‌تواند به طریق ذیل سرمایه‌گذاری نماید. اگر این فرد ۲ واحد از پول خود را همان روز و ۱ واحد پول خود را روز بعد سرمایه‌گذاری نماید روز سوم ۴ واحد پول دریافت

OR12_ir OR12.ir

خواهد نمود. این فرد می‌خواهد بداند به چه طریقی باید پول خود را سرمایه‌گذاری نماید، به‌طوری‌که پول نقد او روز شنبه همان هفته حداکثر شود.

حل: چون بطور صریح ذکر نگردیده است که چه ساعتی در روز بایستی سرمایه‌گذاری کرد، از این‌رو، ما فرض می‌کنیم هر ساعتی در روز که سرمایه‌گذاری نماید روز سوم همان ساعت پول را دریافت خواهد نمود. در هر روز این فرد فعالیتهای زیر را می‌تواند داشته باشد:

۱) سرمایه‌گذاری روز قبل را با ۵۰٪ اضافی تعقیب کند.

۲) سرمایه‌گذاری جدیدی را شروع نماید.

۳) پول خود را برای سرمایه‌گذاری آینده پس‌انداز کند.

باید توجه داشته باشید که اگر فعالیت ۱ را شروع نماید و بخواهد برگشتی از سرمایه‌گذاری روز قبل داشته باشد هیچ انتخابی برای او نمانده است. اما او با در نظر گرفتن فعالیتهای ۲ و ۳ انعطاف‌پذیری تام دارد. بنابراین هر روز دو متغیر تصمیم مورد نیاز است. یک متغیر برای نمایش سرمایه‌گذاری که همان روز شروع می‌کند و متغیر دیگر برای نشان دادن پولی که همان روز پس‌انداز می‌نماید.

$x_i\ (i = ۱,...,۴)$: سرمایه‌گذاری جدید به ترتیب در روز دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه و پنج‌شنبه

$S_i\ (i = ۱,...,۵)$: پولی را که به ترتیب در روز دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه، پنج‌شنبه و جمعه پس‌انداز نموده.

هیچ سرمایه‌گذاری جدیدی روز جمعه صورت نمی‌گیرد زیرا روز شنبه این نوع سرمایه‌گذاری برای او برگشتی نخواهد داشت. قیود تضمین می‌کند که در هر روز روابط ذیل صدق کنند:

تمام پول سرمایه‌گذاری شده + پول پس‌انداز شده = پول نقد موجود

برای روز دوشنبه $x_۱ + S_۱ = ۱۰۰$

برای روز سه‌شنبه $\frac{x_۱}{۲} + x_۲ + S_۲ = S_۱$

برای روز چهارشنبه $\frac{x_۲}{۲} + x_۳ + S_۳ = S_۲ + ۲x_۱$

برای روز پنج‌شنبه $\frac{x_۳}{۲} + x_۴ + S_۴ = S_۳ + ۲x_۲$

برای روز جمعه $\frac{x_۴}{۲} + S_۵ = S_۴ + ۲x_۳$

پول نقد کلی در دست روز شنبه عبارتست از $S_۵ + ۲x_۴$، از این رو تابع مقصود عبارتست از:

$$\text{Max } z = S_۵ + ۲x_۴$$

OR12_ir OR12.ir

قبل از بیان مسأله بعد، ابتدا به اختصار مفهوم خالص ارزش فعلی (**NPV**)[1] را توضیح می‌دهیم، که برای مقایسه مطلوبیت سرمایه‌گذاری‌های مختلف بکار می‌رود. زمان فعلی، زمان صفر است. فرض کنید سرمایه‌گذاری ۱، به **۱۰,۰۰۰** دلار در زمان صفر و **۱۴,۰۰۰** دلار در دو سال بعد از حال، نیاز دارد و **۲۴,۰۰۰** دلار در یک سال بعد از حال، برگشت دارد. سرمایه‌گذاری ۲، به **۶۰۰۰** دلار در زمان صفر و **۱۰۰۰** دلار در دو سال بعد از حال نیاز دارد و **۸۰۰۰** دلار در یک سال بعد از حال، برگشت دارد. کدام سرمایه‌گذاری ترجیح دارد؟

فرض کنید یک سرمایه‌گذاری (مانند اوراق مشارکت) وجود دارد که در آن به ازای ۱ دلار سرمایه‌گذاری در یک زمان، (با قطعیت) مقدار $1+r$ دلار در سال بعد پرداخت می‌گردد. r را نرخ بهره سالیانه می‌نامیم. از آنجا که ۱ دلار در زمان حال می‌تواند به $1+r$ دلار در سال بعد تبدیل شود، داریم:

$(1+r)^k$ دلار در سال kام $= \dots = 1+r$ دلار در یک سال بعد $= 1$ دلار در زمان فعلی

بنابراین،

$(1+r)^{-k}$ دلار در زمان فعلی $= 1$ دلار در k سال بعد

می‌توان این ایده را که (تنزیل جریان نقدی در لحظه صفر نامیده می‌شود) برای بیان همه جریان‌های نقدی در لحظه صفر بر حسب دلار، بیان نمود. با استفاده از تنزیل، می‌توان ارزش کلی جریان نقدی (در لحظه صفر به دلار) در هر سرمایه‌گذاری را مشخص کرد. ارزش کلی جریان نقدی (در لحظه صفر به دلار) در هر سرمایه‌گذاری، ارزش خالص فعلی یا **NPV** سرمایه‌گذاری نامیده می‌شود.

فرض کنید $r = 0.2$ باشد، حال **NPV** را برای سرمایه‌گذاری ۱ و ۲ محاسبه می‌کنیم:

سرمایه‌گذاری ۱ $\mathbf{NPV} = -10{,}000 + \frac{24000}{1+0.2} - \frac{14000}{(1+0.2)^2} = 227.78$ دلار

سرمایه‌گذاری ۲ $\mathbf{NPV} = -6000 + \frac{8000}{1+0.2} - \frac{1000}{(1+0.2)^2} = -27.78$ دلار

ارزش فعلی سرمایه‌گذاری ۱ بیشتر از ۲ است بنابراین سرمایه‌گذاری ۱ از ۲ برتر است.

مثال ۳۰: شرکت استار اویل در حال بررسی پنج فرصت مختلف سرمایه‌گذاری است. جریان‌های نقدی خروجی و مقدار خالص نقدی (به میلیون دلار)، در جدول زیر داده شده است. در حال حاضر (لحظه صفر)، این شرکت ۴۰ میلیون دلار برای سرمایه‌گذاری در اختیار دارد. پیش‌بینی می‌شود که سال بعد (لحظه ۱)، ۲۰ میلیون دلار برای سرمایه‌گذاری در دست باشد. شرکت می‌تواند کسری از هر سرمایه‌گذاری را بخرد. در این حالت، جریان‌های نقدی خروجی و **NPV**، تطبیق می‌یابند. برای مثال، اگر شرکت یک پنجم سرمایه‌گذاری ۳ را بخرد، آنگاه جریان نقدی $(\frac{1}{5})5 = 1$ میلیون دلار در لحظه صفر و $(\frac{1}{5})5 = 1$ میلیون دلار در لحظه ۱ لازم است. یک پنجم سرمایه‌گذاری

1. Net Present Value

OR12_ir OR12.ir

۳، دارای مقدار **NPV** برابر **۳.۲ = ۱۶(۱.۵)** میلیون دلار است. استار اویل می‌خواهد **NPV** حاصل از سرمایه‌گذاری روی پروژه‌های ۱ تا ۵ را بیشینه کند. یک مدل خطی فرموله کنید که شرکت را در رسیدن به این هدف یاری کند. فرض کنید، هر پول نقدی را که در لحظه صفر به کار گرفته نشود، نمی‌توان در لحظه ۱ استفاده کرد.

جریان‌های نقدی و ارزش خالص فعلی در بودجه‌بندی سرمایه (دلار)

	سرمایه‌گذاری				
	۱	۲	۳	۴	۵
جریان نقدی لحظه صفر	۱۱	۵۳	۵	۵	۲۹
جریان نقدی لحظه ۱	۳	۶	۵	۱	۳۴
ارزش خالص فعلی	۱۳	۱۶	۱۶	۱۴	۳۹

حل: شرکت باید تصمیم بگیرد که چه کسری از هر سرمایه‌گذاری را بخرد. متغیرهای تصمیم را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم. x_i را کسری از سرمایه‌گذاری **i** که توسط شرکت خریداری می‌شود $(i = ۱,۲,۳,۴,۵)$ در نظر بگیرید، هدف شرکت، بیشینه کردن **NPV** حاصل از سرمایه‌گذاری است.

$$Z = ۱۳x_۱ + ۱۶x_۲ + ۱۶x_۳ + ۱۴x_۴ + ۳۹x_۵$$

محدودیت لحظه صفر این است که شرکت نمی‌تواند بیش از ۴۰ میلیون دلار سرمایه‌گذاری کند:

$$۱۱x_۱ + ۵۳x_۲ + ۵x_۳ + ۵x_۴ + ۲۹x_۵ \le ۴۰$$

محدودیت لحظه یک این است که شرکت نمی‌تواند بیش از ۲۰ میلیون دلار سرمایه‌گذاری کند:

$$۳x_۱ + ۶x_۲ + ۵x_۳ + x_۴ + ۳۴x_۵ \le ۲۰$$

در ضمن شرکت نمی‌تواند بیش از ۱۰۰٪ سرمایه‌گذاری **i** $(i = ۱,۲,۳,۴,۵)$ را بخرد.

$$x_i \le ۱,\ i = ۱,۲,۳,۴,۵$$

بنابراین مدل زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\max\ \ & Z = ۱۳x_۱ + ۱۶x_۲ + ۱۶x_۳ + ۱۴x_۴ + ۳۹x_۵ \\
\text{s.t.}\ \ & ۱۱x_۱ + ۵۳x_۲ + ۵x_۳ + ۵x_۴ + ۲۹x_۵ \le ۴۰ \\
& ۳x_۱ + ۶x_۲ + ۵x_۳ + x_۴ + ۳۴x_۵ \le ۲۰ \\
& x_۱ \le ۱ \\
& x_۲ \le ۱ \\
& x_۳ \le ۱ \\
& x_۴ \le ۱ \\
& x_۵ \le ۱ \\
& x_i \ge ۰\ ;\ i = ۱,۲,۳,۴,۵
\end{aligned}$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

رژیم غذایی

مثال ۳۱: احتیاجات رژیم غذایی شخصی، از خوردن غذاهایی تأمین می‌شود که در یکی از (چهار گروه) گروه‌های غذایی پایه قرار دارند (کیک شکلاتی، بستنی، لیموناد و کیک پنیر آناناسی). در حال حاضر، چهار غذای ذیل برای مصرف در دسترس هستند، نان شیرینی، بستنی شکلاتی، کولا و کیک پنیر آناناسی. هر روز این شخص باید حداقل ۵۰۰ کالری، ۶ اونس شکلات، ۱۰ اونس شکر و ۸ اونس چربی بخورد. میزان مواد غذایی موجود در هر واحد از غذاها و هزینه خرید هر واحد از غذاها در جدول زیر آمده است. یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید که برای برآوردن حداقل احتیاجات غذایی روزانه با حداقل هزینه استفاده شود.

مقدار مواد برای رژیم غذایی و هزینه خرید هر واحد از غذاها

	کالری‌ها	شکلات (اونس)	شکر (اونس)	چربی (اونس)	هزینه خرید (سنت)
نان شیرینی	۴۰۰	۳	۲	۲	۵۰
بستنی شکلاتی (۱ لیوان)	۲۰۰	۲	۲	۴	۲۰
کولا (۱ بطری)	۱۵۰	۰	۴	۱	۳۰
کیک پنیر آناناسی (۱ قطعه)	۵۰۰	۰	۴	۵	۸۰

حل: متغیرهای تصمیم را بصورت زیر تعریف می‌کنیم. x_1, x_2, x_3, x_4 را به ترتیب تعداد نان شیرینی، تعداد بستنی‌های شکلاتی، تعداد بطری‌های کولا و تعداد قطعه کیک پنیر آناناسی که روزانه باید خورده شود. بنابراین هزینه کل رژیم غذایی که باید حداقل گردد عبارتست از:

$$Z = ۵۰x_1 + ۲۰x_2 + ۳۰x_3 + ۸۰x_4$$

محدودیت مربوط به کالری:

$$۴۰۰x_1 + ۲۰۰x_2 + ۱۵۰x_3 + ۵۰۰x_4 \geq ۵۰۰$$

محدودیت مربوط به شکلات:

$$۳x_1 + ۲x_2 \geq ۶$$

محدودیت مربوط به شکر:

$$۲x_1 + ۲x_2 + ۴x_3 + ۴x_4 \geq ۱۰$$

در نهایت محدودیت مربوط به چربی عبارتست از:

$$۲x_1 + ۴x_2 + x_3 + ۵x_4 \geq ۸$$

بنابراین مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر نتیجه می‌شود:

Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

$$\min\ Z = ۵۰x_۱ + ۲۰x_۲ + ۳۰x_۳ + ۸۰x_۴$$
$$\text{s.t.}\ ۴۰۰x_۱ + ۲۰۰x_۲ + ۱۵۰x_۳ + ۵۰۰x_۴ \geq ۵۰۰$$
$$۳x_۱ + ۲x_۲ \geq ۶$$
$$۲x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۳ + ۴x_۴ \geq ۱۰$$
$$۲x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + ۵x_۴ \geq ۸$$
$$x_۱, x_۲, x_۳, x_۴ \geq ۰$$

زمان‌بندی کار

مثال ۳۲: یک دفتر پست به تعدادی کارمند تمام‌وقت در روزهای هفته نیاز دارد، که این تعداد در هر روز متفاوت است. تعداد کارمندان تمام وقت مورد نیاز در هر روز، در جدول زیر داده شده است. قاعده مشترک برای کارمندان این است که همه باید پنج روز متوالی کار کرده و سپس دو روز بیکار باشند. برای مثال، یک کارمند از دوشنبه تا جمعه کار کرده و شنبه و یکشنبه را تعطیل است. دفتر پست می‌خواهد برای رفع نیازهای روزانه خود، کارمند تمام‌وقت استخدام کند. یک برنامه‌ریزی خطی فرموله کنید که دفتر پست، آن را برای کمینه کردن تعداد کارمندان تمام وقتی که استخدام می‌شوند، به کار گیرد.

نیازهای کارمندان دفتر پست

روزهای هفته	تعداد کارمندان تمام‌وقت مورد نیاز
روز ۱	۱۷
روز ۲	۱۳
روز ۳	۱۵
روز ۴	۱۹
روز ۵	۱۴
روز ۶	۱۶
روز ۷	۱۱

حل: x_i را تعداد افرادی که از روز iام شروع به کار می‌کنند در نظر بگیرید، برای مثال، $x_۱$ تعداد افرادی است که از روز دوشنبه شروع به کار می‌کنند (این افراد از دوشنبه تا جمعه کار می‌کنند). از آنجا که هر کارمند دقیقاً در یک روز از هفته کار خود را شروع می‌کند تابع هدف بصورت زیر خواهد بود:

$$\min Z = x_۱ + x_۲ + \dots + x_۶ + x_۷$$

دفتر پست باید اطمینان حاصل کند که هر روز هفته، تعداد کافی از کارمندان در حال کار هستند. برای مثال روز دوشنبه باید حداقل ۱۷ کارمند در حال کار باشند، در این روز، همه بجز کارمندانی که سه‌شنبه یا چهارشنبه شروع به کار می‌کنند (و به ترتیب، یک‌شنبه و دوشنبه، و دوشنبه و سه‌شنبه تعطیل هستند)، مشغول هستند. این بدین معناست

OR12_ir OR12.ir

که تعداد کارمندانی که روز دوشنبه در حال کار هستند، $x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$ است. بنابراین محدودیت روز دوشنبه بصورت زیر است:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$$

با افزودن محدودیتهای مشابه برای شش روز دیگر هفته و محدودیتهای علامت $x_i \geq 0$ $(i = 1,\dots,7)$، مسأله به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

s.t.	$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17$	(محدودیت دوشنبه)
	$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13$	(محدودیت سه‌شنبه)
	$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15$	(محدودیت چهارشنبه)
	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19$	(محدودیت پنج‌شنبه)
	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14$	(محدودیت جمعه)
	$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16$	(محدودیت شنبه)
	$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11$	(محدودیت یک‌شنبه)
	$x_i \geq 0;\ i = 1,\dots,7$	(محدودیتهای علامت)

مسائل امتزاج

وضعیتی که در آن لازم است تا ورودی‌های مختلف به نسبتهای مطلوب ترکیب شده و کالایی برای فروش تولید شود، معمولاً به تجزیه و تحلیل‌های برنامه‌ریزی خطی مربوط می‌شود. چنین مسائلی را مسائل امتزاج می‌نامند.

مثال ۳۳: یک کمپانی نفت خام دو نوع بنزین (سوپر و معمولی) به فروش می‌رساند. هر نوع بنزین دارای خصوصیاتی در مورد ماکزیمم فشار مجاز تبخیر و می‌نیمم غلظت اکتان می‌باشد که در جدول زیر خلاصه شده است:

بنزین	ماکزیمم فشار مجاز تبخیر	می‌نیمم غلظت اکتان	ماکزیمم تقاضا در هفته (بشکه)	قیمت هر بشکه
سوپر	۷	۱۰۳	۱۲۰۰۰	۱۰
معمولی	۸	۹۴	۵۹۰۰۰	۹

در این کمپانی دو نوع نفت **A** و **B** جهت تولید بکار می‌رود، مشخصات آنها به قرار زیر است:

OR12_ir OR12.ir

نفت	فشار تبخیر	غلظت اکتان	ماکزیمم تولید (بشکه)	هزینه هر بشکه
A	۹	۱۰۹	۱۵۰۰۰	۸
B	۶	۹۰	۴۰۰۰۰	۷

طرح کمپانی آن است که ترکیبی از دو نوع بنزین را در هفته بفروش برساند که سود حاصل حداکثر گردد، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای آن ارائه دهید.

حل: فرض کنید x_1 و y_1 مقادیری از نفت **A** باشند که به ترتیب به تولید بنزین معمولی و سوپر تخصیص یافته‌اند. همچنین x_2 و y_2 مقادیری مشابه از نفت **B** در نظر گرفته شوند. اینک می‌توان سود نهایی حاصل از فروش هر نوع بنزین را محاسبه نمود. مثلاً در مورد نفت **A** هزینه بشکه آن ۸ تومان است و فروش هر بشکه بنزین معمولی ۹ تومان است از این رو سود نهائی حاصل از فروش یک بشکه بنزین معمولی تولید شده از **A** برابر ۱ تومان است، به طور مشابه، داریم:

نفت	هزینه هر بشکه	سود نهایی برای بنزین	
		معمولی	سوپر
A	۸	۱	۲
B	۷	۲	۳
قیمت فروش		۹	۱۰

اینک می‌توان تابع هدف را بصورت زیر خلاصه کرد:

$$\text{Maz } Z = x_1 + 2y_1 + 2x_2 + 3y_2$$

محدودیتهای تولید و تقاضا، نامعادلات زیر را بوجود می‌آورند:

محدودیت تولید نفت **A**	$x_1 + y_1 \le 15000$
محدودیت تولید نفت **B**	$x_2 + y_2 \le 40000$
محدودیت تقاضا برای بنزین سوپر	$y_1 + y_2 \le 12000$
محدودیت تقاضا برای بنزین معمولی	$x_1 + x_2 \le 59000$

در رعایت محدودیتهای ماکزیمم فشار تبخیر و می‌نیمم غلظت اکتان قاعده بر آن است که مخلوط تولیدات **A** و **B**، حاوی مقدار فشار و اکتان متناسب با مجموع فشار و اکتان موجود در هر کدام می‌باشد (یعنی به صورت میانگین وزین). مثلاً اگر یک بشکه از **A** را با یک شبکه از **B** مخلوط کنیم، با توجه به فشار تبخیر هر کدام، فشار تبخیر بنزین مخلوط شده برابر است با:

$$\frac{9(1)+6(1)}{1+1} = 7.5$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

و همچنین غلظت اکتان حاصل برابر است با:

$$\frac{۱۰۹(۱)+۹۰(۱)}{۱+۱}=۹۹.۵$$

از این‌رو فشار تبخیر بنزین معمولی برابر می‌گردد با:

$$\frac{۹x_۱+۶x_۲}{x_۱+x_۲}$$

که حداکثر بنزین معمولی ۸ است، خواهیم داشت:

$$\frac{۹x_۱+۶x_۲}{x_۱+x_۲}\le ۸ \Rightarrow x_۱-۲x_۲\le ۰$$

همچنین برای محدودیت فشار تبخیر در بنزین سوپر داریم:

$$\frac{۹y_۱+۶y_۲}{y_۱+y_۲}\le ۷ \Rightarrow ۲y_۱-y_۲\le ۰$$

به دلیل مشابه برای محدودیت می‌نیمم غلظت اکتان در بنزین معمولی داریم:

$$\frac{۱۰۹x_۱+۹۰x_۲}{x_۱+x_۲}\ge ۹۴ \Rightarrow ۱۵x_۱-۴x_۲\ge ۰$$

به طور مشابه برای می‌نیمم غلظت اکتان در بنزین سوپر خواهیم داشت:

$$\frac{۱۰۹y_۱+۹۰y_۲}{y_۱+y_۲}\ge ۱۰۳ \Rightarrow ۶y_۱-۱۳y_۲\ge ۰$$

بنابراین مدل حاصل برای مسأله فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & Z=x_۱+۲y_۱+۲x_۲+۳y_۲\\
\text{s.t.}\quad & x_۱+y_۱\le ۱۵۰۰۰\\
& x_۲+y_۲\le ۴۰۰۰۰\\
& y_۱+y_۲\le ۱۲۰۰۰\\
& x_۱+x_۲\le ۵۹۰۰۰\\
& x_۱-۲x_۲\le ۰\\
& ۲y_۱-y_۲\le ۰\\
& ۱۵x_۱-۴x_۲\ge ۰\\
& ۶y_۱-۱۳y_۲\ge ۰\\
& x_۱,y_۱,x_۲,y_۲\ge ۰
\end{aligned}$$

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

برنامه‌ریزی منطقه‌ای

مثال ۳۴: کشاورزان یک منطقه زراعی تصمیم دارند که عملیات کاشت، داشت و برداشت را به شکل تعاونی انجام دهند، تا از قابلیتهای یکدیگر و امکانات دولتی استفاده کرده و تولید جمعی را افزایش دهند. این منطقه از سه مزرعه تشکیل شده است. دو عامل زمین و آب امکانات کاشت این مزارع را محدود می‌نمایند. اطلاعات مربوط به آب موجود در زمین قابل کشت سه مزرعه در جدول زیر آمده است:

مزرعه	زمین قابل کشت (هکتار)	آب موجود (هزار مترمکعب)
۱	۴۰۰	۶۰۰
۲	۶۰۰	۸۰۰
۳	۳۰۰	۳۷۵

محصولات مناسب کشت در این منطقه زراعی عبارت از چغندرقند، پنبه و ذرت است. میزان عملکرد در هکتار و آب مورد نیاز این سه محصول با یکدیگر متفاوتند. به علاوه، برای حصول به ترکیب مناسبی از سه محصول، کاشت هر محصول نمی‌تواند از یک مقدار مشخص بیشتر باشد، این اطلاعات در جدول زیرآمده است:

محصول	حداکثر کشت (هکتار)	مصرف آب (هزار مترمکعب)	منافع خالص (دلار در هکتار)
چغندرقند	۶۰۰	۳	۴۰۰
پنبه	۵۰۰	۲	۳۰۰
ذرت	۳۲۵	۱	۱۰۰

کشاورزان سه مزرعه توافق کرده‌اند که نسبت زمین کاشته شده به زمین موجود برای هر سه مزرعه مساوی باشد. لیکن، محدودیتی در مورد ترکیب کشت محصولات در هر یک از سه مزرعه وجود ندارد. مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله فوق را ارائه دهید.

حل: هدف تعیین مقدار زمینی است که باید در هر مزرعه به هر محصول اختصاص یابد. متغیرهای تصمیم x_j، $(j = ۱,۲,...,۹)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

مزرعه / محصول	تخصیص (هکتار)		
	۱	۲	۳
چغندرقند	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$
پنبه	$x_۴$	$x_۵$	$x_۶$
ذرت	$x_۷$	$x_۸$	$x_۹$

OR12_ir OR12.ir

چون معیار کارآمدی Z نشان‌دهنده کل سود حاصل است، لذا مدل برنامه‌ریزی خطی مسأله به شکل زیر خواهد بود:

$$\text{Max } Z = ۴۰۰(x_۱ + x_۲ + x_۳) + ۳۰۰(x_۴ + x_۵ + x_۶) + ۱۰۰(x_۷ + x_۸ + x_۹)$$

s.t.

$$\left.\begin{array}{l} x_۱ + x_۴ + x_۷ \le ۴۰۰ \\ x_۲ + x_۵ + x_۸ \le ۶۰۰ \\ x_۳ + x_۶ + x_۹ \le ۳۰۰ \end{array}\right\} \text{زمین}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۳x_۱ + ۲x_۴ + x_۷ \le ۶۰۰ \\ ۳x_۲ + ۲x_۵ + x_۸ \le ۸۰۰ \\ ۳x_۳ + ۲x_۶ + x_۹ \le ۳۷۵ \end{array}\right\} \text{آب}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_۱ + x_۲ + x_۳ \le ۶۰۰ \\ x_۴ + x_۵ + x_۶ \le ۵۰۰ \\ x_۷ + x_۸ + x_۹ \le ۳۲۵ \end{array}\right\} \text{محصول}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_۱ + x_۴ + x_۷}{۴۰۰} = \dfrac{x_۲ + x_۵ + x_۸}{۶۰۰} \\ \dfrac{x_۲ + x_۵ + x_۸}{۶۰۰} = \dfrac{x_۳ + x_۶ + x_۹}{۳۰۰} \\ \dfrac{x_۳ + x_۶ + x_۹}{۳۰۰} = \dfrac{x_۱ + x_۴ + x_۷}{۴۰۰} \end{array}\right\} \text{موافقتنامه}$$

$$x_j \ge ۰ \,,\; j = ۱,\dots,۹$$

به این ترتیب مدل کامل شده است، فقط محدودیتهای مربوط به موافقتنامه را به شکل زیر تغییر می‌دهیم:

$$۳(x_۱ + x_۴ + x_۷) - ۲(x_۲ + x_۵ + x_۸) = ۰$$
$$x_۲ + x_۵ + x_۸ - ۲(x_۳ + x_۶ + x_۹) = ۰$$
$$۴(x_۳ + x_۶ + x_۹) - ۳(x_۱ + x_۴ + x_۷) = ۰$$

مسأله ترکیبی خوراک

مثال ۳۵: یک کارخانه کشاورزی خوراک دانه مرغ تولید می‌کند. این کار را با ترکیب عناصری نظیر ذرت، سنگ آهن، یا یونجه انجام می‌دهد. ترکیب به طریقی انجام می‌گیرد که خوراک، مقادیر معینی از مواد مغذی متفاوت نظیر پروتئین، کلسیم، کربوهیدرات‌ها و ویتامین‌ها را شامل شود. برای روشن شدن، فرض کنید که n تعداد عناصر ترکیبی $j = ۱,۲,\dots,n$ و m تعداد عناصر مغذی $i = ۱,۲,\dots,m$ است. فرض کنید که c_j هزینه هر واحد عنصر

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor

jام و نیز x_j مقدار عنصر ترکیبی jام مورد استفاده باشد. بنابراین کل هزینه $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ است. اگر تعداد محصول نهایی مورد نیاز b باشد، آنگاه $\sum_{j=1}^{n} x_j = b$ داریم. باز فرض کنید که a_{ij} مقدار مواد مغذی iام موجود در یک واحد ترکیبی jام باشد، و حد بالا و پائین مورد قبول مواد مغذی iام در یک واحد خوراک مرغ به ترتیب ℓ'_i و u'_i باشد. بنابراین باید محدودیتهای $\ell'_i b \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le u'_i b$ را به ازای $i = 1, 2, \ldots, m$ داشته باشیم. بالاخره، به دلیل کمبودها، فرض کنید کارخانه حداکثر u_j واحد عنصر ترکیبی j را به دست آورد. مسأله ترکیب مواد به طوری که هزینه می‌نیمم شود و محدودیتهای مورد نیاز برقرار باشند را می‌توان چنین فرمول‌بندی کرد:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \\
& x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b \\
& b\ell'_1 \le a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \le b u'_1 \\
& b\ell'_2 \le a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \le b u'_2 \\
& \qquad \vdots \\
& b\ell'_m \le a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n \le b u'_m \\
& 0 \le x_1 \le u_1 \\
& 0 \le x_2 \le u_2 \\
& \qquad \vdots \\
& 0 \le x_n \le u_n
\end{aligned}
$$

۱-۴- بررسی تغییراتی در مسأله برنامه‌ریزی خطی

در انتهای این فصل مثال‌هایی را مورد بحث قرار می‌دهیم که تغییراتی را در حالت کلی روی مسأله برنامه‌ریزی خطی بررسی می‌کنند، از جمله:

۱- اضافه شدن سمت راست محدودیت iام به اندازه یک واحد

۲- حذف و اضافه شدن یک محدودیت

۳- حذف و اضافه شدن یک متغیر

۴- ترکیب دو تابع هدف و مقایسه آن با حالت قبل (نواحی شدنی یکسان)

مثال ۳۶: مسأله زیر را درنظر بگیرید:

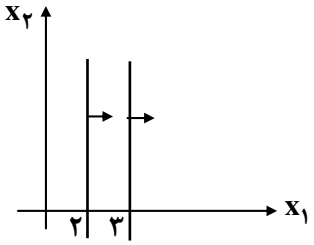
$$
\begin{aligned}
\min \quad & cx \\
\text{s.t.} \quad & Ax \ge b \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

OR12_ir OR12.ir

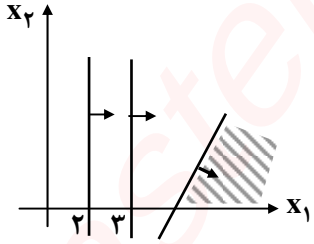
Created in Master PDF Editor

فرض کنید مؤلفه i ام بردار b با افزایش یک واحد به $b_i + ۱$ تغییر کند. ناحیه شدنی و مقدار تابع هدف بهینه چه تغییری می‌کند؟

حل: با یک مثال ساده تغییرات ممکن را بررسی می‌کنیم، فرض کنید محدودیت i ام به صورت $x_۱ \geq ۲$ بوده و به $x_۱ \geq ۳$ تغییر می‌یابد:



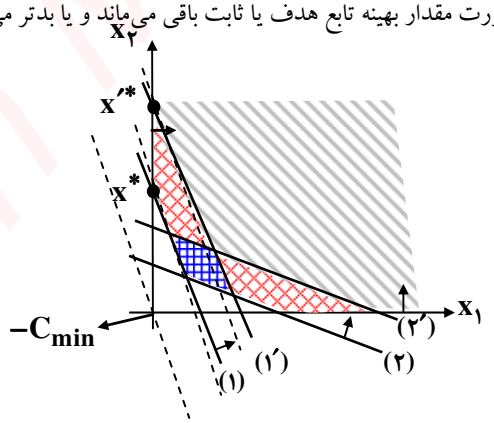
ظاهراً ناحیه شدنی مسأله کوچکتر می‌شود ولی ممکن است محدودیت فوق زائد باشد و ناحیه شدنی مسأله ثابت باقی بماند، مانند شکل زیر:



بنابراین دو حالت ممکن برای ناحیه شدنی داریم:

✔ ثابت باقی بماند و در نتیجه مقدار تابع هدف بهینه تغییر نمی‌کند.

✔ کوچکتر شود، در این صورت مقدار بهینه تابع هدف یا ثابت باقی می‌ماند و یا بدتر می‌شود.

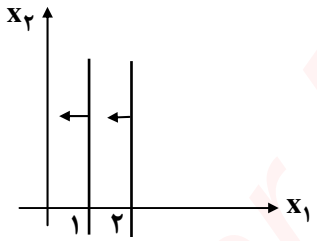


Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

در شکل بالا، با تغییر سمت راست محدودیت دوم $(۲ \to ۲')$ ناحیه شدنی کوچکتر می‌شود ولی مقدار تابع هدف بهینه تغییر نمی‌کند و نقطه x^* بهینه باقی می‌ماند، همچنین با تغییر سمت راست محدودیت اول ناحیه کوچکتر می‌شود $(۱ \to ۱')$ ولی مقدار تابع هدف بهینه بدتر می‌شود زیرا نقطهٔ x'^*، جواب بهینه جدید است. بنابراین این‌طور نتیجه می‌گیریم که با تغییر انجام شده ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و تابع هدف بهینه بهتر نمی‌شود.

مثال ۳۷: در مثال قبل فرض کنید محدودیتهای $Ax \geq b$ را با $Ax \leq b$ عوض کنیم، فرض کنید سمت راست محدودیت i یعنی b_i را به $b_i + ۱$ تغییر دهیم، برای مثال $x_۱ \leq ۱$ به $x_۱ \leq ۲$ تغییر کند.



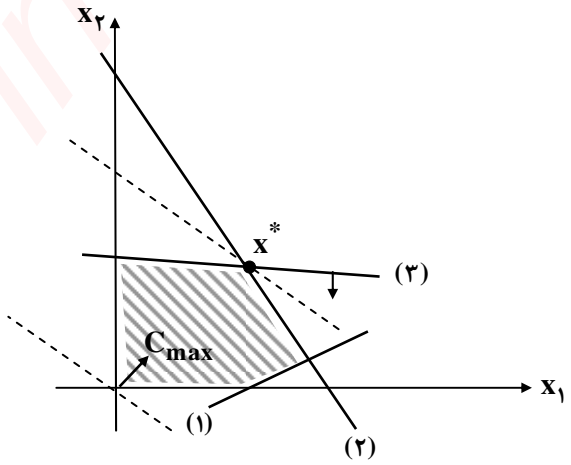
حل: پیرو توضیحات مثال قبل و با استدلال مشابه می‌توان گفت ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بهینه بدتر نمی‌شود.

مثال ۳۸: مسأله زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید محدودیت جدید $m + ۱$ به مسأله اضافه شود:

$$\max Cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \geq b$$
$$x \geq ۰$$

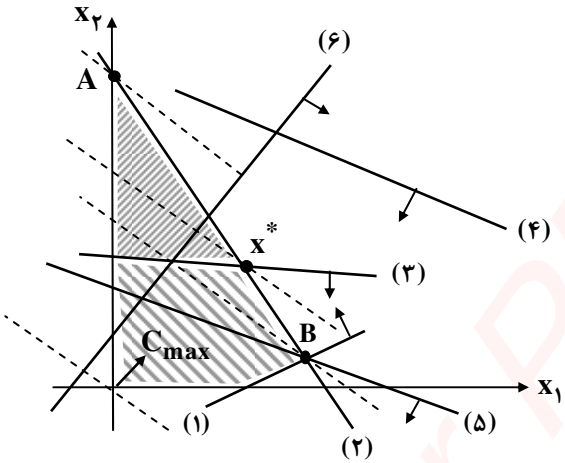
ناحیه شدنی و مقدار تابع هدف بهینه چه تغییری می‌کند؟ در صورت حذف محدودیت iام، جواب به چه صورت خواهد بود؟

حل: به شکل زیر دقت کنید، فرض محدودیتهای مسأله در ابتدا، محدودیتهای (۱) و (۲) و (۳) بوده است:



OR12_ir OR12.ir

می‌خواهیم تغییرات حاصل از اضافه شدن محدودیتهای ۴، ۵ و ۶ (شکل زیر) و حذف بعضی از محدودیتها را بررسی کنیم:



اضافه شدن محدودیت: با اضافه شدن محدودیت زائد **۴** ناحیه شدنی تغییر نمی‌کند، با اضافه شدن محدودیت **۵** ناحیه شدنی کوچکتر شده و مقدار تابع هدف بهینه بدتر می‌شود، (نقطه **B** بهینه است) با اضافه شدن محدودیت **۶**، ناحیه شدنی کوچکتر می‌شود ولی مقدار تابع هدف بهینه تغییر نمی‌کند. بنابراین در نهایت می‌توان گفت با اضافه شدن یک محدودیت ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و تابع هدف بهینه بهتر نمی‌شود.

حذف شدن محدودیت: با حذف محدودیت غیرفعال **۱** جواب بهینه تغییر نمی‌کند ولی ناحیه شدنی بزرگتر می‌شود، با حذف محدودیت زائد **۴** جواب بهینه و ناحیه شدنی تغییر نمی‌کند ولی با حذف محدودیت **۲**، ناحیه شدنی بزرگتر شده و جواب بهینه بهتر می‌شود، بنابراین می‌توان گفت با حذف محدودیت **i**ام، ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بهینه بدتر نمی‌شود.

مثال ۳۹: مسأله زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید متغیر جدید $n+1$ به مسأله اضافه شود،

$$\min Cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

ناحیه شدنی و مقدار تابع هدف بهینه چه تغییری می‌کند؟ فرض کنید یک متغیر، مثلاً x_k، از مسأله حذف شود، در این صورت ناحیه شدنی و مقدار تابع هدف بهینه چه تغییری می‌کند؟

حل: با اضافه شدن یک متغیر ناحیه شدنی کوچکتر نمی‌شود و تابع هدف بهینه بدتر نمی‌شود و با حذف متغیر x_k، ناحیه شدنی بزرگتر نمی‌شود و تابع هدف بهینه بهتر نمی‌شود.

در حالت کلی، تغییرات مسأله روی ناحیه شدنی و تابع هدف تأثیرات متقابل زیر را خواهد داشت:

Created in Master PDF Editor

OR12_ir OR12.ir

ناحیه شدنی	مقدار تابع هدف بهینه
بزرگتر نمی‌شود	بهتر نمی‌شود
کوچکتر نمی‌شود	بدتر نمی‌شود

در نهایت در جدول زیر، مثال‌های فوق را جمع‌بندی می‌کنیم:

مقدار بهینه تابع هدف	ناحیه شدنی	نوع تغییر	ردیف
بهتر نمی‌شود	بزرگتر نمی‌شود	$Ax \geq b$ $x \geq ۰$ $b_i \to b_i + ۱$	۱
		اضافه شدن محدودیت	۲
		حذف شدن متغیر	۳
بدتر نمی‌شود	کوچکتر نمی‌شود	$Ax \leq b$ $x \geq ۰$ $b_i \to b_i + ۱$	۴
		حذف شدن محدودیت	۵
		اضافه شدن متغیر	۶

توجه داشته باشید بهتر نشدن تابع هدف در مسأله ماکزیمم‌سازی به معنی بزرگتر نشدن و در مسأله می‌نیمم‌سازی به معنی کوچکتر نشدن است، همچنین بدتر نشدن را می‌توان بطور مشابه تعبیر کرد.

مثال ۴۰: اگر S ناحیه امکان‌پذیر مربوط به مسأله برنامه‌ریزی ریاضی باشد، $z_۱ = \text{Max } f(x)$ و $z_۲ = \text{Max } g(x)$ روی ناحیه S تعریف شده باشد، در این صورت با تعریف $z_۳ = \text{Max}(f+g)(x)$ در این ناحیه، چه رابطه‌ای بین $z_۳, z_۲, z_۱$ وجود دارد؟

حل: $x_۳^*, x_۲^*, x_۱^*$ را به ترتیب جوابهای بهینه مسائل ۱ و ۲ و ۳ در نظر بگیرید، هر کدام از این جوابهای بهینه، برای دو مسأله دیگر شدنی هستند، بنابراین:

$$z_۱ = f(x_۱^*) \geq \{z_۳ = f(x_۳^*), z_۲ = f(x_۲^*)\}$$

$$z_۲ = g(x_۲^*) \geq \{z_۳ = g(x_۳^*), z_۱ = g(x_۱^*)\}$$

$$\Rightarrow z_۱ + z_۲ \geq ۲z_۳ \Rightarrow z_۳ \leq z_۱ + z_۲ \quad \text{یا} \quad \text{Max}(f+g)(x) \leq \text{Max } f(x) + \text{Max } g(x)$$

همچنین در مسأله **Min** سازی با همان تعاریف بالا داریم:

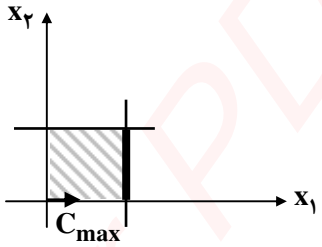
$$z_۳ \geq z_۱ + z_۲ \quad \text{یا} \quad \text{Min}(f+g)(x) \geq \text{Min} f(x) + \text{Min} g(x)$$

OR12_ir OR12.ir

مثال ۴۱: مسائل برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } z_۲ = x_۱ \qquad x_۱ \le ۱ \qquad x_۲ \le ۱ \qquad x_۱, x_۲ \ge ۰$$

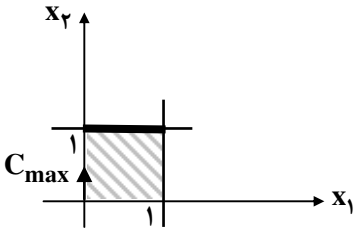
$$\Downarrow$$



$$z_۲^* = ۱$$

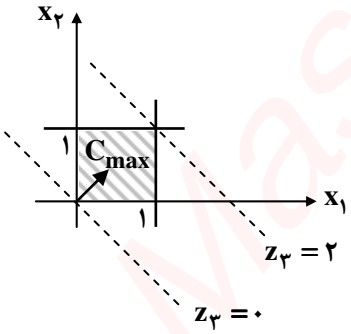
$$\text{Max } z_۱ = x_۲ \qquad x_۱ \le ۱ \qquad x_۲ \le ۱ \qquad x_۱, x_۲ \ge ۰$$

$$\Downarrow$$



$$z_۱^* = ۱$$

با تعریف $z_۳ = x_۱ + x_۲$ و همان ناحیه شدنی قبل، داریم:



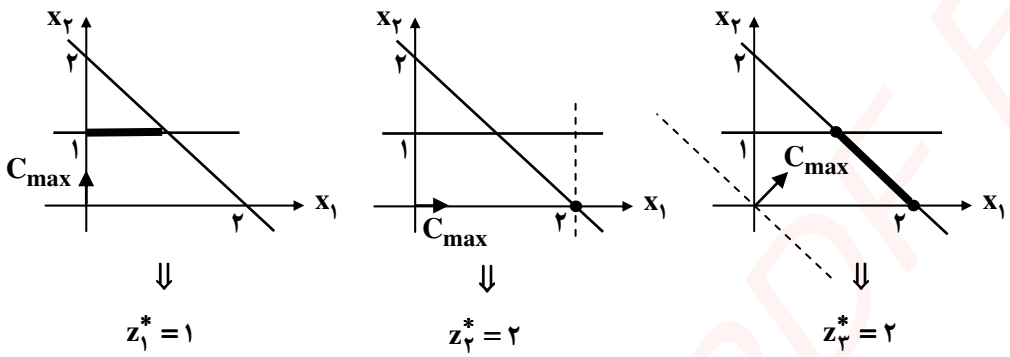
$$, \qquad z_۳^* = ۲$$

بنابراین $z_۳^* = z_۱^* + z_۲^*$ خواهد بود، حال اگر ناحیه شدنی را به صورت:

$$x_۱ + x_۲ \le ۲ \qquad x_۲ \le ۱ \qquad x_۱, x_۲ \ge ۰$$

تغییر دهیم، خواهیم داشت:

Created in Master PDF Editor



ملاحظه می‌شود $z^*_۳ < z^*_۱ + z^*_۲$ خواهد بود.

Created in Master PDF Editor

کانالها و گروه تحقیق در عملیات مهندس ایمن پور

مدرس تحقیق در عملیات کنکور ارشد و دکتری

کانال اصلی تحقیق در عملیات ۱و۲ امیر ایمن پور

@OR۱۲_ir

گروه رفع اشکال درس تحقیق در عملیات ۱و۲

https://t.me/joinchat/BSv۵ck۳nHYzj۳s۰DmRz-iQ

کانال رفع اشکال تحقیق در عملیات ۱و۲

@OR۱۲ir

ادمین تلگرام

@imenpour

اینستاگرام تحقیق در عملیات ۱و۲

instagram.com/or۱۲.ir

سایت تحقیق در عملیات ۱و۲

www.OR۱۲.ir

ایمیل

imenpour@outlook.com

OR12_ir OR12.ir

Created in Master PDF Editor